SYLVIE TREMBLAY

LES ACTIVITES GÉOMÉTRIQUES POUR UNE ARITHMÉTIQUE PLUS SIGNIFICATIVE

Essai
présenté
à la Faculté des sciences de l'éducation
de l'Université Laval
pour l'obtention
du grade de Maitre ès arts (M.A.)

Département de didactique, psychopédagogie et technique éducative
Programme de maitrise en psychopédagogie
FACULTÉ DES SCIENCES DE L'ÉDUCATION
UNIVERSITÉ LAVAL

2013

Avant-propos

J’aimerais d’abord préciser que cet essai aurait dû être réalisé au **programme de didactique** et non au programme de psychopédagogie.

Au départ, je ne voyais pas vraiment la différence entre «psychopédagogie» et «didactique». J’étais même convaincue que mes connaissances en psychologie allaient jouer un rôle important pour ce projet d’écriture. Je dois avouer que mon entêtement à terminer ma maitrise en psychopédagogie n’a pas joué en ma faveur.

Au fur et à mesure de mes lectures et de mes résumés, je constate que je dois combler mon manque de connaissances et de vocabulaire reliés à la didactique en faisant des lectures supplémentaires. Pour répondre aux exigences de mon travail, j’ai principalement consulté des recherches et des documents en lien avec la didactique.

Cependant, cette expérience, non géométrique, m’a permis une prise de conscience importante concernant la différence entre psychopédagogie et didactique. Bien sûr, on pourrait utiliser le préfixe «psycho» dans tous les domaines où il y a interaction avec des humains. Cependant, lorsque des concepteurs créent ou améliorent de nouveaux outils, ils le font en visant leur plus grande efficacité possible tout en considérant les besoins humains du moment. Dans cet essai, je m’intéresse aux outils de géométrie, le matériel didactique et les représentations.

Madame Lucie DeBlois, je vous remercie sincèrement de m’avoir laissé explorer mon erreur! Au moins par cette expérience, je réalise la valeur réelle de l’erreur qui permet des prises de conscience significatives. Toutes mes réflexions m’ont apporté un bagage immense en didactique. Je tiens tout de même à m’excuser pour mon entêtement.

Donc, cet essai doit être considéré comme un travail qui répond à des exigences en didactique.

Table des matières

Introduction

En tant qu'orthopédagogue, il m'arrive de rencontrer des jeunes éprouvant de lourdes difficultés d'apprentissage en mathématiques. Je dois donc trouver des approches pour favoriser le développement d'une compréhension des mathématiques. En général, pour aider les élèves en difficulté en mathématiques, j'utilise la géométrie et plus particulièrement des activités permettant d'utiliser un matériel de manipulation. Au cours des années, j'ai constaté que si la compréhension en géométrie est faible ou absente, la compréhension des concepts arithmétiques est plus difficile. Je souhaite poser une réflexion afin de documenter comment l'apprentissage de la géométrie pourrait stimuler les observations et les découvertes des élèves pour contribuer au développement de l'arithmétique.

L'hypothèse selon laquelle une exploitation des activités géométriques réalisées dès le primaire pourrait favoriser l'apprentissage de l'arithmétique par la mise en évidence de certaines caractéristiques qui ne font pas intervenir les nombres mais les relations, ce qui pourrait contribuer à développer une conception différentes des mathématiques.

Actuellement dans la plupart de nos classes, l'enseignement de l'arithmétique consiste à donner une explication pour la bonne opération à faire où on décrit les différents rôles à tenir (détective, architecte, etc.). Le rôle de l'élève consiste à apprendre la routine (procédure) du problème à faire. On emploie parfois des objets, mais pour montrer les bonnes démarches. Cependant, les élèves n'ont pas accès à des contre-exemples pour éprouver la théorie et en discuter. Dans le cadre de cet essai, nous nous attarderons d'abord à la distinction entre problème d'application et situation-problème afin d'identifier les écueils d'une situation-problème. Nous analyserons ensuite les résultats obtenus concernant l'apprentissage des élèves lorsqu'ils ont à réaliser des activités géométriques. Nous serons alors en mesure de reconnaître dans quelle mesure les activités géométriques contribuent à réduire l'influence des écueils identifiés. Nous terminerons ensuite par des recommandations pour l'intervention en arithmétique.

Démarche du travail

L'arithmétique est une branche des mathématiques qui s'intéresse au sens et à l'écriture des nombres (naturels, fractions, décimaux et entiers), au sens des opérations sur des nombres (choix des opérations, les relations entre les opérations et les différentes propriétés) et aux opérations sur les nombres. L'apprentissage de l'arithmétique implique la compréhension des nombres, les procédures des opérations et leur application dans les situations problèmes de la vie courante. Ceci explique pourquoi l'essai est abordé par la résolution de problème source de difficultés auprès des élèves. Le présent travail est effectué à partir de la littérature en didactique. Les différents documents consultés contiennent des résultats de recherches et des réflexions concernant l'utilisation du matériel didactique en géométrie. Mon but au moment du choix des documents était de vérifier comment ce matériel favorisait la compréhension des élèves en mathématiques.

Plusieurs recherches ont déjà été faites en didactique de la géométrie et l'analyse des résultats observés permet de repérer des constances intéressantes. En effet, des résultats similaires se retrouvent dans les différentes recherches concernant l'attitude des élèves, leurs réactions, leurs intérêts, leur façon d'observer et d'analyser les situations. Il est aussi intéressant de voir l'évolution des élèves en fonction de l'âge, d'où l'intérêt d'observer les élèves avec l'utilisation du matériel didactique à des âges différents et des niveaux différents dans le parcours scolaire. Par mes lectures, je découvre un «fossé» entre l'apprentissage de l'arithmétique et son application dans les problèmes d'application. Je souhaite donc savoir si la documentation existante me permet de faire une analyse de base pouvant par la suite explorer les différentes activités et résolution de situations en géométrie qui pourraient combler ce «fossé». L'ajout d'activités géométriques avec matériel pourrait compléter l'apprentissage des opérations en arithmétiques en ajoutant du sens et ensuite favoriser la résolution de problèmes qui oblige l'application des opérations arithmétiques.

L’objectif du présent travail consiste à cerner et à analyser avec attention les écueils qui empêchent les élèves de passer aisément des algorithmes en arithmétique aux mises en situations écrites telles qu’observées dans la littérature pour élaborer des moyens qui permettent aux élèves d’abord de mieux comprendre le sens des opérations arithmétiques pour pouvoir créer des relations logico-mathématiques plutôt que de procéder par habitudes devant les différents problèmes proposés dans une classe. La littérature en didactique possède une mine d’informations qui permet ce genre de travail. Nous explorerons d’abord les écueils dans les résolutions de problèmes pour continuer avec l’apport des activités en géométrie pour contrer les écueils et donner du sens à l’arithmétique par les découvertes et les prises de conscience à l’égard des caractéristiques et des relations en jeu.

1. Résolution de problème et exigences des situations-problèmes

La résolution d'une situation-problème est la compétence centrale des mathématiques. Toutefois, il est important de distinguer la résolution de problèmes d'application et la résolution de situation-problème. DeBlois (2011) mentionne que les problèmes d'application servent surtout à l'approfondissement des apprentissages et des procédures connues par les élèves. Les problèmes d'application rendent difficile l'observation du raisonnement mathématique des élèves car souvent la discussion entre élèves est absente. Le travail de raisonnement est alors invisible ou remplacé au profit de règles ou d'habitudes (DeBlois et Larivière, 2012). À la limite, un élève pourrait prendre certains nombres de l'énoncé, tenter une opération…et arriver à la bonne réponse! L'élève risque alors d'être convaincu que sa procédure est bonne. La résolution de situations-problèmes présente l'avantage, entre autres, de rendre nécessaire l'émergence de nouveaux concepts mathématiques. En outre, l'usage de matériel didactique s'avère un outil permettant à l'élève de relancer le raisonnement.

Voici un exemple de problème à résoudre. Les élèves savent comment appliquer la formule de l'aire d'un triangle dans leurs problèmes d'application. Ils n'ont pas encore appris la formule pour le calcul de l'aire du l'hexagone. Comment s'y prendront-ils pour résoudre l'aire d'un hexagone régulier en ayant deux mesures, celle de l'apothème et la longueur d'un côté? Leur première réaction sera sans doute de dire qu'ils n'ont pas encore appris cela et qu'ils ne savent pas comment faire. En permettant la discussion entre les pairs, en leur disant que non ils n'ont pas appris la solution, comment peut-on faire alors pour trouver l'aire? Sur ce, on les laisse réfléchir et discuter. Quelle sera leur démarche? Auront-ils l'idée de tracer des triangles égaux? Est-ce qu'ils peuvent imaginer les triangles non tracés qui sont contenus dans l'hexagone et dire : «on calcule l'aire d'un triangle et on multiplie par 6 parce qu'il y a 6 triangles» pour avoir l'aire totale? Le fait de provoquer le questionnement des élèves, (d'où vient la formule du triangle… et les autres formules?) suscite le développement du raisonnement. Le questionnement est à la base même de la pensée géométrique et du raisonnement. Cette activité amène les élèves à fouiller dans leurs connaissances pour aller plus loin dans leurs découvertes.

Or, en milieu scolaire, la formule de l'hexagone et de son application sont enseignées et l'élève devra par la suite faire des problèmes d'application pour solutionner différentes situations impliquant les nouvelles connaissances. Dans l'activité-problème proposé ci-haut, les élèves tombent directement dans le mode raisonnement comparativement au problème d'application dans lesquels les élèves ont tendance à chercher la bonne formule, écourtant ainsi le raisonnement. Certains élèves ont tendance à «ramasser» les nombres pour les faire correspondre à une formule sans même tenir compte du contexte. Il y a une différence entre l'application d'une procédure et une résolution de problème dans laquelle il faut analyser pour élaborer une démarche qui peut paraitre intuitive au départ. Serait-il judicieux d'ajouter des situations-problème, aux problèmes d'application, pour favoriser le raisonnement des élèves?

Certains problèmes d'application laissent peu de place à l'analyse et au raisonnement. En effet, le problème d'application limite souvent l'élève à utiliser des notions enseignées en classe ou encore à utiliser une démarche décrite par l'enseignant. Quand le problème d'application devient routinier, il ne présente plus un défi pour l'élève. On peut alors se demander ce que l'élève comprend de ces routines. Dans ces conditions, l'élève apprend à se conformer plutôt qu'à analyser et à raisonner. Bien que certains problèmes fournis dans les manuels scolaires soient inspirés de la vie courante, les élèves n'ont pas la possibilité de les résoudre concrètement et de voir les résultats de leur travail. Dans ces conditions, le problème à solutionner n'existe pas pour eux et dans ce cas-ci, le vrai problème consiste à trouver la «bonne» réponse en utilisant les «bonnes» opérations.

Pour résoudre une situation-problème, l'élève devra analyser le contenu et dégager les éléments qui permettront de les organiser en vue de trouver une solution. Les problèmes d'application proposés n'exigent pas des élèves d'entrer dans ce processus. En somme, devant un problème à résoudre, les élèves se heurtent à plusieurs écueils : la fausse réalité, la rétroaction possible de la tâche, les énoncés, la compréhension des relations logico-mathématiques, la reconnaissance des invariants opératoires ou encore à un trop petit espace pour travailler. C'est ce à quoi nous nous attardons maintenant.

1.1 La fausse réalité

Dans leur recherche, Berte *et al* (2006) ont voulu démontrer que la manière de préparer la situation à résoudre est plus importante que le contexte dit réel du problème présenté. En effet, une fausse réalité ne permettrait pas aux élèves une véritable activité mathématique. Par exemple, un problème consistant à calculer la longueur d'une clôture pour entourer une piscine peut conduire les élèves à appliquer une formule apprise…la bonne, mais ils ne verront pas le résultat de leur travail. En effet, ils ne poseront pas la clôture. Ces auteurs constatent que la référence à la réalité dans un problème peut faire obstacle à la résolution. D'une part, l'élève doit transformer la réalité en langage mathématique. Les maisons deviennent des points et les distances des lignes. D'autre part, la façon de résoudre une situation serait différente dans la réalité puisque certaines contraintes sont souvent ignorées dans le modèle mathématique. C'est ainsi que la situation proposée devient une fausse réalité. Enfin, ces auteurs ajoutent que dans les manuels, l'élève n'a souvent qu'à suivre des directives : recopie, complète, dessine. La modélisation d'un phénomène est évitée en la proposant dans l'énoncé. Il faut toutefois distinguer la modélisation, issue de l'activité de mathématique, de la notion de modelage qui émerge de l'enseignement explicite des théories cognitives. Ces auteurs suggèrent de proposer des situations problèmes en utilisant, par exemple, la construction géométrique.

Les activités en géométrie procurent cette réalité immédiate qui provoque une attitude différente pour chercher ou/et résoudre la situation. Les élèves auraient davantage tendance à chercher des moyens ou des solutions pour réaliser l'activité présentée. La capacité à modéliser une situation géométrique pourrait-elle être réinvestie ensuite dans le raisonnement d'un problème arithmétique? Le matériel didactique, inévitable dans les activités géométriques, a l'avantage de procurer aux élèves cette réalité immédiate qui pourrait stimuler l'imaginaire et la motivation des élèves.

1.2 La rétroaction de la tâche

Lépine (1996-1997) mentionne que les problèmes ouverts favorisent la mise en situation pour chercher et aider les élèves à développer des compétences à résoudre un problème: faire des hypothèses qui seront vérifiées par des essais, rechercher en groupe en émettant, critiquant et argumentant des idées et des solutions. Ce type de problèmes ne suggère pas de méthode, ni de solution. De préférence, les élèves ont une certaine familiarité avec le contexte du problème. L'analyse et le raisonnement des élèves sont sollicités. Un problème ouvert qui implique le dessin et la confection d'un solide permet aux élèves d'analyser, de comparer, de déduire et de vérifier les patrons correspondant aux objets, ce qui contribue au développement de relations logico-mathématiques.

Lépine (1996-1997) reconnaît que tout problème ouvert ne favorise pas toujours chez l'élève l'élaboration d'une démarche de recherche pour en arriver à trouver une solution. Ainsi, lors d'une recherche, il a présenté le problème suivant à une classe d'élèves de 14 ans: *Avec un récipient de trois litres et un autre de cinq litres, on demande aux élèves comment on peut obtenir 4 litres.* Chaque élève recevait l'énoncé. Les expérimentateurs se sont assuré que tout le monde en comprenait les termes. D'abord, les élèves ont fait un travail individuel avant de se placer en équipes. Le fait de laisser travailler les élèves individuellement pour commencer avait pour but de favoriser leur implication lors du travail en équipe. La majorité des élèves ont eu besoin d'aide pour amorcer leurs réflexions sur le projet. Ils ne savaient pas quoi faire avec l'eau et les récipients, ni quoi écrire dans leurs cahiers.

Vue la difficulté persistante des élèves, un schéma a été présenté au tableau en exemple. Il était important d'éviter de donner des informations qui influenceraient le travail de recherche fait par les élèves. Des flèches indiquaient le mouvement de transvasement. À partir de ce modèle, les élèves ont compris ce que voulait vraiment dire «transvasement». Par la suite, les élèves ont travaillé en groupes. Cette période était prévue pour les essais, les discussions et les échanges d'idées dans le but de trouver des solutions possibles en équipes. Chaque équipe devait rédiger son propre document explicatif du travail de recherche effectué. Les élèves ont eu tendance à ramener en groupe leurs solutions individuelles erronées. Les expérimentateurs devaient relancer la recherche des élèves en leur disant qu'ils pouvaient utiliser l'eau au besoin. Ils pouvaient vider et recommencer et essayer d'autres opérations de transvasement. Finalement un premier groupe a trouvé une solution, puis les cinq autres groupes. Par la suite, la mise en commun en classe a permis aux élèves d'éliminer les mauvaises solutions et de valider les autres. Le débat s'est fait essentiellement entre les élèves. Malheureusement dans cette expérience, l'équipe qui n'a pas trouvé de solution a été malmenée par les autres. En outre, malgré la simplification de l'énoncé du problème de transvasement, on a dû ajouter des précisions en cours d'expérimentation.

Dans ce cas-ci, l'erreur qui surgit des manipulations des élèves ne leur permet pas un ajustement de leurs connaissances. Cela les empêche de construire une démarche de résolution de problème qui ferait progresser le travail vers une solution. Ce chercheur suggère de modifier l'activité en demandant aux élèves de trouver toutes les quantités possibles avec les 2 récipients seulement ce qui va permettre des possibilités et des discussions orientées vers d'autres possibilités encore. Cette expérience montre comment les situations-problèmes nécessitent non seulement d'analyser et de raisonner mais aussi de développer des habiletés sociales. Selon St-Laurent *et coll.* (1995), les habiletés sociales se développent, entre autres, par des interactions sociales par lesquelles les élèves travaillent en collaboration à une tâche. En effet, les élèves apprennent à réfléchir à des solutions, à les argumenter, à les analyser en groupe, à les modifier au besoin, à recevoir les arguments des autres, à écouter les arguments des autres…bref, des habiletés sociales favorisant des débats constructifs lors des travaux d'équipes. L'enseignant devient un guide ou un animateur qui oriente les élèves vers des échanges constructifs.

Idéalement, le problème de type ouvert favorise la recherche de plusieurs solutions possibles et l'erreur qui surgit permet aux élèves une rétroaction sur leurs productions ce qui entraine la relance de la recherche. Ce phénomène favorise les découvertes et les habiletés sociales utiles pour le travail d'équipe. Le problème ouvert qui ressemble à un projet de recherche favorise la rétroaction de la tâche. Les activités en géométrie, et la manipulation habituellement en jeu, ont l'avantage de procurer des problèmes qui ne sont pas stéréotypés.

1.3 Les énoncés

Souvent, le véritable enjeu dans la résolution de problème dans les manuels réside dans la compréhension de l'énoncé du problème présenté, en particulier le texte. Le mot «énoncé» peut facilement être confondu avec l'expression «résolution de problème». Pourtant, l'énoncé peut être utilisé pour introduire un exercice par une consigne, pour expliquer un schéma ou un tableau ou pour décrire une situation que ce soit un exercice ou un problème à résoudre. Record (1983) soulève un fait reconnu par l'ensemble des enseignants. Les élèves éprouvent beaucoup de difficulté dans la lecture des énoncés de problèmes.

Il ajoute que les élèves sont capables de lire et de comprendre des textes plus difficiles. Cependant, il y a une différence entre décoder un énoncé et établir des relations entre les données de cet énoncé. Il mentionne l'importance de s'intéresser aux textes des situations mathématiques. En analysant les problèmes écrits dans les manuels scolaires, il soulève certains obstacles à la compréhension : le vocabulaire utilisé, le niveau de grammaire et la manière de poser les questions. Il est primordial de s'intéresser aux textes en mathématiques sur lesquels souvent les élèves se heurtent.

Selon Record (1983), les manuels scolaires présentent différents agencements possibles de situation en utilisant les éléments suivants : des énoncés, des tableaux, des dessins. Parfois, l'insertion d'un tableau ou d'un graphique peut faciliter la compréhension des phrases de l'énoncé. D'autres fois les phrases servent à compléter l'information pour une bonne compréhension du tableau ou d'un graphique. Le tableau ou le graphique et les phrases sont des éléments complémentaires pour former un énoncé complet. Parfois, il n'y a que des phrases. De plus, il mentionne que les problèmes d'application et les exercices peuvent se présenter sous diverses formes. D'abord, le problème d'application est complètement présenté sous forme de phrases complètes. Cela exige non seulement le décodage du message mais aussi l'analyse de ce dernier pour en ressortir les relations de nature mathématique.

Ensuite, les énoncés peuvent se présenter sous forme télégraphique. Dans ce cas-ci, l'élève doit compléter l'idée des énoncés dans un effort de déduction. D'autres énoncés peuvent se présenter sous forme d'un tableau ou d'une représentation graphique. Une partie du tableau est verbalisé et une partie est symbolique. Dans ce cas, l'élève doit être en mesure d'interpréter le tableau avant de pouvoir répondre à une question.

Au niveau logico-mathématique, certains groupements, présentés simultanément avec des sous-groupes peuvent confondre les élèves. Par exemple : les cerises et les prunes sont des fruits. Les mots cerise et prune sont des sous-groupes contenus dans l'ensemble fruit. En outre, la manière de présenter certains qualificatifs peut provoquer une confusion dans la compréhension des élèves. Par exemple, l'expression «les chemises rouges à manches blanches» pourrait confondre l'élève à cause de la juxtaposition des qualificatifs.

Un autre point est à souligner, un vocabulaire qui est familier dans la vie des élèves peut venir en conflit avec un même vocabulaire en mathématiques mais dont le sens est différent. Dans un article de la revue Grand N «Vous avez dit volume» dont l'auteur est inconnu (Grand N, 1983), on a demandé à un groupe de 21 élèves de 5^{e} année (10 ans) de donner la définition du mot «volume». La majorité des élèves définissent le volume comme étant le niveau du son ou du bruit. Ils s'expriment en donnant des exemples : le volume de la musique, de la télévision, le bruit dans la pièce… D'autres tentatives de définitions sont faites, mais elles sont ambiguës. Certains font un lien avec les mathématiques en donnant certaines références : aire, longueur, épaisseur d'un dictionnaire, synonyme de degré, volume d'un rectangle, au poids, lien entre le contour et le diamètre, lumière, force, tomes des livres, beaucoup de pages, associe le volume au nombre de parts… Peu d'élèves arrivent à faire des comparaisons pour expliquer le volume, une comparaison qui approche de la définition : on augmente le volume d'une couverture en glissant des ballons gonflés sous la couverture, le volume d'un coffre est de 400 dm^3 peut contenir des jouets en considérant leurs volumes, le volume d'eau, un contenant qui a un fond et qui peut contenir de l'eau. Dans l'ensemble, le niveau du son reste la définition la plus fréquente. En mathématiques, la définition du volume est floue et peu présente pour l'ensemble des élèves de la classe. L'auteur mentionne que cet état de fait peut créer des malentendus lors de l'enseignement des volumes en mathématiques. L'enseignant croit employer des mots simples, mais le message peut facilement être mal interprété par les élèves.

Au niveau du texte, Record (1983) mentionne que les erreurs de formulation, les temps de la conjugaison, l'emploi du conditionnel et du participe présent sont autant d'éléments qui peuvent nuire à la compréhension du problème. Le fait de passer du langage oral accepté socialement au langage écrit peut représenter un obstacle important pour les élèves. En effet, il y a une différence entre «Y en a combien ?» et «Combien y en a-t-il? ». Si on demande aux élèves ce qu'ils feront demain, ils répondront : «j'va faire du bicycle, j'va aller à l'école…» et non : «je ferai du vélo, j'irai à l'école…» Alors, la simple question «Combien en auront-ils?» peut être difficile à comprendre si l'élève ne maitrise pas cette formulation. Ce genre de différence devient un obstacle qui empêche l'élève de comprendre la situation mathématique en jeu. D'où l'importance de tenir compte du niveau de grammaire des élèves.

En ce qui concerne la phrase**,** certaines formulations complexes confondent la pensée de l'élève. Il doit commencer par décoder le texte pour après faire ressortir les relations mathématiques. Record (1983) suggère de simplifier la formulation de l'énoncé et la question par des phrases plus courtes en se référant au niveau de grammaire des élèves pour formuler un énoncé mieux adapté à leur compréhension. En somme, la familiarité des élèves avec certaines expressions ou encore une attention porte à des indices plutôt qu'aux relations en jeu risquent de réduire l'exploration mathématique des élèves et provoquer des erreurs.

Avant de pouvoir résoudre une situation décrite dans ses problèmes d'application, les élèves doivent d'abord décoder l'énoncé et ensuite établir des relations entre les données avant de choisir adéquatement la ou les opérations arithmétiques à effectuer. Le vocabulaire, la formulation, le conflit entre le langage oral et écrit, le langage logico-mathématique, le vocabulaire familier dans la vie courante qui a un sens différent en mathématique, la complexité de la phrase sont autant d'obstacles à la résolution du problème qui s'ajoutent au choix des bonnes opérations arithmétiques à utiliser. Les activités de géométrie ont l'avantage de favoriser l'utilisation du vocabulaire pour nommer, décrire et classer, ce qui favoriserait la mise en place d'un vocabulaire qui indique des relations logico-mathématiques.

1.4 Des relations logico-mathématiques

En plus des obstacles au niveau du langage écrit (Record 1983), les opérations mathématiques ne sont pas indiquées dans les énoncés. Les élèves doivent déduire ou inférer les relations mathématiques en fonction des données fournies. Plusieurs mots ou termes qui accompagnent les nombres dans l'énoncé donnent des indices. Ainsi, le raisonnement des élèves est orienté en fonction de son interprétation de l'énoncé. Dans un contexte, le mot «et» indique une addition. Par exemple, Louise achète une blouse à $5 et un pantalon à $20, combien paiera-t-elle en tout? Dans un contexte d'ensembles, «ou» indique aussi une addition. Si ce genre d'indice est mal interprété ou ignoré, le raisonnement des élèves en sera modifié. Les élèves sont alors en «panne» pour raisonner adéquatement et établir des relations logico-mathématiques. L'interprétation de l'énoncé interfère avec le raisonnement mathématique.

En outre, les problèmes de comparaison ont été bien documentés depuis quelques années (DeBlois, 1997, Giroux et Ste-Marie, 2000). En effet, les expressions «de plus» et «de moins» utilisées sont parfois consistantes avec l'opération à réaliser alors qu'à d'autres occasions, elles sont inconsistantes. Les élèves doivent dans ces conditions porter leur attention aux relations logico-mathématiques en jeu (dans ce cas la relation d'implication si… alors), plutôt qu'aux expressions, pour faire les inférences nécessaires au choix de l'opération à utiliser.

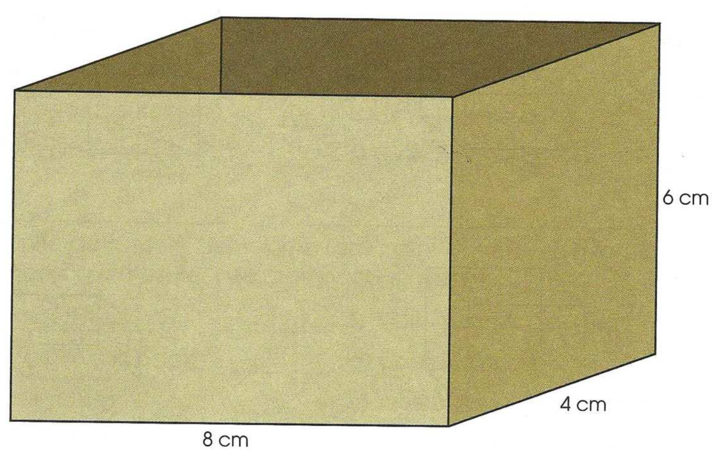
La question stéréotypée dirige les élèves vers la recherche de la réponse alors que la question ouverte dirige les élèves vers le raisonnement logique. Au début de l'article «À propose de patrons de solides» (Grand N, 1995-1996), l'auteur (inconnu) donne deux exemples de situations à résoudre issus des manuels scolaires et qui exigent un raisonnement logique des élèves qui s'appuie sur des habiletés de visualisation. Le premier problème consiste pour les élèves à relier 4 polyèdres différents à leur patron respectif. Dans l'autre, ils doivent associer le patron qui va permettre de construire la boite démontrée. Ce type de problèmes exige des habiletés de visualisation dont nous parlerons plus loin. Toutefois, le fait de vérifier directement auprès des élèves, par une question, les raisons pour lesquelles ils ont privilégié telle ou telle action ou opération rend possible l'observation de la nature de leur raisonnement, leur capacité à établir des relations logico-mathématiques. Cependant, cette question est souvent absente (Record, 1983). Si on accompagne la question ouverte par l'utilisation de matériel didactique et/ou de la discussion entre pairs, il est possible d'observer les relations logico-mathématiques utilisées par les élèves.

L'interprétation que font les élèves des indices de l'énoncé influence leur raisonnement et donc le choix des opérations arithmétiques à effectuer. De plus, il est difficile d'observer le raisonnement des élèves à partie des problèmes d'application résolus en silence. Il est donc difficile de bien cerner comment les indices sont retracés et analysés par les élèves. Les activités en géométrie qui favorisent les échanges entre pairs rend possible l'observation des relations logico-mathématiques faites par les élèves, car leur raisonnement devient apparent.

1.5 Reconnaître des invariants opératoires

Les élèves qui résolvent des problèmes arithmétiques ou algébriques utilisent rarement les propriétés des opérations pour résoudre des problèmes. DeBlois (1997) a d'ailleurs observé comment il devenait nécessaire à une élève de 8 ans de répéter l'opération d'addition lorsque l'ordre des nombres était modifié. Les propriétés des opérations correspondent à des invariants qui permettent de reconnaître que la somme ou que le produit n'est pas modifié par rapport à l'ordre de présentation des nombres dans le problème. En outre, l'apprentissage de la numération pose plusieurs difficultés aux élèves (DeBlois, 1996). Plusieurs de ces difficultés sont liées à la reconnaissance d'une variété d'invariances comme celle qui est relative à la façon d'organiser la quantité, ce qui permet de reconnaître les relations d'équivalence entre dix unités et une dizaine ou entre dix dizaines et une centaine, etc.

Analysons le problème géométrique suivant[1] : «Trouve les dimensions (longueur, largeur et hauteur) de trois boites différentes qui auraient le même volume que la boite illustrée dessous.



[1] Bardier, J.-C. (2003). p.66

La boite a une longueur de 8 cm, une largeur de 4 cm et une hauteur de 6 cm. Changer les dimensions signifie changer la forme du solide, mais le volume peut rester le même. Ce problème est propice pour une activité de manipulation avec du matériel didactique. Les élèves pourraient découvrir ce constat : «il est possible d'avoir plusieurs formes de solides avec un même nombre de cubes». Ce phénomène deviendrait alors visible à leurs yeux et ultérieurement visible sans matériel.

Proposer le même genre de problème sans matériel didactique serait l'étape suivante. Sans le support du matériel, les élèves pourraient appliquer la formule V= L x l x h, soit 8 x 4 x 6 = 192. Ensuite, ils doivent partir du V = 192 pour trouver d'autres dimensions. Ils pourraient essayer aléatoirement des dimensions avec lesquelles ils appliqueraient encore la formule pour obtenir le V = 192. Alors, le phénomène d'invariance du volume par rapport aux dimensions d'un solide risque de passer inaperçu. De plus, l'orientation d'un objet donne une image ou une photographie différente, cependant l'objet n'a pas changé. Ce type d'activités géométriques permet l'observation de phénomènes mathématiques qui pourraient passer inaperçus autrement. Les élèves se préoccupent peu des propriétés (commutativité, associativité et distributivité) des opérations dans leur résolution de problèmes. La découverte de l'invariance du produit d'une multiplication ou de la somme d'une addition par rapport à l'ordre des termes pourrait-elle être facilitée par des activités de géométrie?

2. La géométrie peut-elle contrer certains écueils?

L'analyse précédente identifie certains écueils dans l'apprentissage des mathématiques par la résolution de situations-problèmes, d'où l'hypothèse de départ.

2.1 Les écueils liées à la représentation et à sa pertinence

Il existe plusieurs formes de représentations et d'illustrations, ayant des caractéristiques différentes à considérer, avec lesquelles l'élève a besoin de se familiariser. Selon Lismont et Rouche (2001), il existe une diversité de moyens de représentations et d'illustrations en géométrie : 1) Les maquettes et les modèles sont des reproductions en trois dimensions de la réalité. Cela représente un avantage, car la comparaison avec la réalité est vérifiable. Cette reproduction correspond souvent à un modèle réduit; 2) Les projections correspondent aussi à des phénomènes observables : orthogonales (les différentes vues), parallèles (ombre du soleil) et centrales (ombre d'une lampe et photographies). Les photos et les images sont des représentations des objets réels. Par contre, les projections impliquent un passage de trois à deux dimensions ce qui causent des confusions comme une vue de face dessinée en plan ou encore une vue de dessus présentée de face au tableau; 3) Le développement des surfaces (patron) s'applique plutôt aux objets dépliables. Le but du développement est, entre autres, de permettre la reconstruction soit en pliant ou soit en enroulant; 4) Les projections cartographiques (géométrie hyperbolique) sont utiles, notamment, dans le cas de la sphère. En effet, on ne peut pas la dérouler pour la mettre plat comme en patron. Cependant, on peut en représenter une partie ou en faire une cartographie. Quelle influence ces représentations ont-elles sur le développement de la pensée mathématique des élèves?

2.1.1. Représenter pour se rappeler

Une expérience de représentation par dessins a été vécue en classe maternelle (Grand N, 1985). Dans cette situation, les chercheurs ont voulu que les élèves trouvent un moyen pour mémoriser plusieurs objets. Au départ, les élèves ont tendance à attendre une solution de l’adulte. Ils finissent par essayer une solution qui va être amélioré en cours de route. Ensemble, ils construisent un modèle de représentation. Comme, il y a des élèves qui ont réussi à nommer 11 objets sur les 12, les élèves réalisent que la mémorisation peut être possible, qu’ils en sont capables. Pour un meilleur rappel, les élèves prennent conscience qu’ils doivent ajouter des précisions à leurs dessins en insérant des indices. Par exemple, il faut que ce soit de plus en plus ressemblant. Ils sont passés des tentatives de dessins familiers à des représentations plus symboliques en se heurtant à quelques obstacles durant le parcours.

Leur travail a été efficace. Ils ont développé un moyen pour se rappeler tous les objets. Ils prennent conscience de l’utilité des représentations symboliques et aussi de leur capacité à résoudre une situation aux moyens des représentations. Leur démarche est développée à partir de leurs capacités. Combien de fois quand un problème se présente aux élèves, ne sommes-nous pas trop rapides pour montrer comment faire ? Sauf qu’ils apprennent à se fier à l’adulte même pour résoudre leurs problèmes de mathématiques. Il m’arrive souvent d’entendre un élève me dire : «Je ne peux pas faire le problème, car je ne l’ai pas appris». Dans la recherche précédente, les élèves ont conceptualisé (ou modélisé) pour résoudre leur problème. Ils ont développé d’abord une intention et c’est cette dernière qui devient un tremplin pour représenter de manière à ce que cette représentation réponde à leur intention, à leur besoin. Pour cette activité, les chercheurs auraient pu se contenter d’enseigner une façon de représenter les différents objets pour faciliter un rappel ultérieur. Les élèves n’ont pas eu de démonstration d’illustrations pour résoudre une telle situation. Ils devaient trouver comment se rappeler. Cette situation exige une certaine créativité qui peut donner un sens aux représentations mathématiques par la suite. Cette activité a donné du sens à la représentation.

L’auteur inconnu de l’article «A propos de patrons de solides» (Grand N, 1995-1996) propose une situation de recherche sur la confection de patrons de solides à des élèves pour observer l’évolution des habiletés de visualisation des élèves. Plusieurs patrons peuvent reconstituer un même solide comme la situation qui consiste à découvrir que plusieurs patrons non superposables peuvent couvrir une seule pyramide ou à découvrir que ce n'est pas n'importe quelles dispositions des figures qui vont aboutir au résultat souhaité. L'activité de dessin accompagne une activité de construction. Deux contraintes sont présentes : 1) le patron doit être fait d'un seul morceau ; 2) tous les patrons doivent être différents. Si on les superpose, ils ne coïncident pas. Dans une tâche de discussion collective, les élèves observeront les dessins réalisés individuellement pour les analyser, les comparer et reconnaitre les dessins identiques pour les enlever. De plus, les élèves auront la possibilité de vérifier leur patron replié en le comparant au solide.

Parfois, pour simplifier la vue d'ensemble de la réalité et le raisonnement de la situation, différentes représentations sont utilisées : croquis, schématisation c'est-à-dire les dessins qui sont peu ou pas ressemblant de la réalité mais plus utile et plus «ergonomique» pour le raisonnement mathématique. Par exemple, le dessin à main levée d'un solide qui est parfois très différent du solide réel si on le compare, mais dont on comprend la représentation à cause des dimensions notées. Le dessin grossier n'est pas fait à l'échelle, les arêtes sont inégales et parfois ne vont pas jusqu'au coin, il est peu ou n'est pas ressemblant, mais c'est plus rapide. Cependant, avec les mesures ajoutées, il est possible de se faire une idée en imaginant le véritable objet dessiné en croquis. Passer directement à cette étape avec les élèves pourraient s'avérer inefficace pour expliquer une théorie, ils ne sont pas prêts.

Pour développer la capacité à représenter ou à comprendre les différentes représentations, les élèves semblent avoir besoin d'activités de dessin et de construction. Ces habiletés à dessiner et à construire favoriseraient-elles la représentation de leurs problèmes arithmétiques? Ces représentations permettraient-elles de mieux faire ressortir les relations logico-mathématiques pour choisir les opérations arithmétiques appropriées?

2.1.2. Représenter pour faire des modifications

L'utilisation de différents matériaux didactiques en géométrie associé à une activité de dessin permet une prise de conscience sur la nécessité d'avoir à préciser et à modifier la façon de représenter une construction en fonction du besoin du moment. En analysant les recherches de Bessot et Eberhard (1982) effectuées auprès de deux groupes d'élèves (7 ans et 10 ans), il ressort qu'un lien très étroit semble exister entre la construction et le dessin. Parmi les modes de représentations possibles, les élèves semblent privilégier le dessin pour décrire leurs montages ou leurs constructions. Par contre, dessiner une représentation précise d'un montage s'avère une tâche difficile pour les élèves, ceux-ci ont besoin de plusieurs rencontres pour y arriver. De plus, on observe une évolution dans la façon de représenter en fonction du montage présenté.

Bessot et Eberhard (1982) ont proposé des activités d'assemblage de cubes à des élèves (10 ans). Le but est de favoriser la capacité à représenter en décrivant, en dessinant ou les deux. Dès la première séance, l'animatrice propose un jeu de communication qui consiste dans un premier temps à faire un assemblage avec huit cubes accrochables. Une fois cette procédure terminée, les élèves sont invités à écrire un message qui contient les instructions qui vont permettre à un autre élève de refaire la construction la plus exacte possible. Ils peuvent écrire ou dessiner le contenu du message, c'est au choix du concepteur. On note une interférence entre la complexité de l'assemblage et le message à produire. Les élèves ont tendance à simplifier l'assemblage de blocs. En effet, comment expliquer et représenter les espaces vides, les surplombs…? La majorité des élèves ont choisi le dessin et plusieurs dessins différents sont observés.

Par la suite, les élèves sont invités à échanger les messages. Le récepteur du message essaie de reproduire le plus exactement possible le montage décrit. En cours de route, ils notent leurs incompréhensions et les informations manquantes pour la réussite de leur travail. Les élèves discutent de leur expérimentation : les difficultés à comprendre le message, les améliorations à apporter et les solutions envisagées. Au cours des rencontres, l’animatrice amène les élèves à préciser davantage les représentations. On note une évolution dans la capacité de représenter un montage au cours des rencontres. Les élèves proposent même d’ajouter un code au dessin (cela veut dire…). Il n’est pas toujours possible de représenter la réalité telle qu’elle est. Durant ces séances, les élèves prennent conscience d’une diversité de représentations possibles pour décrire une construction et de la nécessité de la précision pour permettre à un autre élève de réaliser la construction.

Les élèves ont adopté un type de représentation qui convenait à leurs types de constructions à ce moment-là de l’expérience. Alors, l’animatrice propose un dessin en perspective qui représente un montage de huit blocs dont six en hauteur. Les enfants se demandent où est le huitième, ils n’en voient que sept. On demande aux enfants de faire un message codé comme celui de Murielle (une élève). On constate que plus on augmente la quantité de blocs, plus ce style de représentation adopté en groupe est difficile. Le message codé de Murielle qui convenait pour les constructions antérieures ne convient plus, Alors, un élève suggère l’utilisation des nombres. Une discussion suit dans le but de préciser le message. L’animatrice propose alors un modèle. Un élève suggère d’ajouter une légende pour expliquer le message codé.

Parfois, des constructions plus complexes nécessitent une autre forme de représentation. Dans la deuxième partie de l’expérimentation, Bessot et Eberhard (1982) présentent des activités en lien avec les projections orthogonales (les vues) pour familiariser les élèves avec les représentations de constructions plus complexes. Les élèves réalisent que plusieurs constructions sont possibles à partir d’une vue, mais que pour préciser une construction, il faut ajouter des vues supplémentaires, deux et même trois…Ils découvrent eux-mêmes les projections et leurs utilités. Lors d’une séance de Benhadj et Debon (1981) l’animatrice demande aux élèves (7 ans) de dessiner l’objet ‘’d’’, une construction de 4 cubes faite antérieurement. Il faut pouvoir représenter tous les côtés. Les enfants éprouve de la difficulté, il rature, taponne, efface… Ils essaient de dessiner tout en discutant de leur problème. Ils réalisent qu’on ne peut pas dessiner les cubes cachés. Donc, l’utilisation des codes apparaît pour corriger cet inconvénient. Les enfants font des propositions nouvelles : code dessiné, code numéroté. Une décision commune est prise, ils décident de dessiner tous les côtés. Ils ont eu l'idée de numéroter les faces de l'objet. Une fois les dessins terminés, ils sont exposés. Les élèves remarquent qu'il y a 6 dessins pour certains objets.

Dans les expérimentations de Bessot & Eberhard, 1982 et Benhadj & Debon, 1981, les élèves prennent conscience que plusieurs possibilités de représentation peuvent décrire une construction. De plus, pour qu'une représentation soit utile, elle doit être complète et précise. Finalement, les élèves réalisent qu'un type de représentation qui convient dans une situation peut avoir besoin de modifications pour convenir à une autre situation. Les élèves découvrent enfin l'utilité des projections orthogonales pour représenter un objet ou une construction.

2.1.3. Représenter pour passer de trois à deux dimensions

En milieu scolaire, des dessins sont souvent utilisés pour illustrer une explication. Alors que dire du dessin 2D qui représente un objet à trois dimensions? Notons que sur la feuille ou le tableau, les segments représentant les arêtes se croisent, mais pas sur les solides. Au niveau des représentations, les possibilités de confusion sont nombreuses. Pendant que l'élève cherche à comprendre le sens à donner au dessin ou à la représentation, il perd la suite des explications. Malheureusement ce problème est invisible aux yeux des enseignants.

Une autre difficulté se présente aux élèves concernant les illustrations et les représentations en 3D. Elles sont dessinées à plat sur une feuille (2D) et certaines parties sont cachées. Il y a deux activités à considérer : associer des dessins et des représentations avec les situations géométriques et produire le dessin ou la représentation d'une situation géométrique. Les élèves ont donc besoin de se familiariser avec les différentes représentations en deux dimensions qui représentent des objets en 3D. Différentes activités de géométrie peuvent favoriser le passage du 3D au 2D et vice versa. Par exemple, la manipulation des solides, où interviennent le dessin, l'association des objets avec des images ou avec des photographies sont autant d'activités favorisant ce passage. Les élèves peuvent observer ce qui se passe lorsque que leur construction est photographiée sous plusieurs aspects.

Notons les cas des perspectives parallèles et cavalières, par exemple. Lismont et Rouche (2001) expliquent que les perspectives cavalières sont des représentations de solides dont les arêtes cachées sont droites. Parfois ces arêtes sont dessinées en pointillé ou tout simplement absentes. Les faces avant et arrière sont similaires à la réalité. Les arêtes sont parallèles comme dans la réalité. Cependant les arêtes ne sont pas toutes d'égales longueurs sur le dessin, contrairement au solide. Les arêtes à 45° ont une longueur à la moitié des arêtes horizontales, même si toutes les arêtes sont égales sur le solide. On peut faire ressortir des caractéristiques principales par ce moyen de représentation : la longueur, la largeur et la hauteur. Cependant il faut noter que sur le papier pointé (aussi appelé perspective isométrique), tous les segments parallèles correspondent à des segments de même longueur pour un cube, donc similaires au cube en 3D. La perspective cavalière est souvent employée dans les documents techniques et scientifiques incluant les mathématiques. Lismont et Rouche (2001) ajoutent que le papier quadrillé ou pointé facilite l'initiation au dessin de la perspective cavalière. Cependant, passer de l'espace au plan exige un effort d'imagination pour reconnaitre le solide observé par rapport à sa représentation en perspective cavalière et vice versa.

Bertotto (2006) s'intéresse à la représentation par le dessin d'un polyèdre à la maternelle. Après avoir choisi un polyèdre, les enfants ont la consigne de le dessiner. La première tendance pour quelques élèves est de choisir un polyèdre facile à dessiner tandis que d'autres y vont au hasard. Les élèves réalisent qu'ils ne peuvent pas dessiner l'arrière du solide, alors ils utilisent la couleur comme repère. Ce genre d'activité, en plus de permettre la reconnaissance de polygones connus, tels le carré, le triangle…fait prendre conscience aux élèves le besoin de développer des procédures pour illustrer les solides ou autres objets en 3D.

Heleyel et Bertotto (1995-1996), quant à eux, présentent une approche de la géométrie à la maternelle avec l'utilisation des polydrons en plastique qui sont des polygones de différentes formes et couleurs : carrés, triangles, pentagones, hexagones et losanges. D'abord, les élèves commencent par construire des polyèdres ou des objets en trois dimensions. Suite aux activités de construction, chaque élève choisit une pièce, parmi les objets construits, et essaie de la dessiner. Certains élèves ont tendance à vouloir dessiner leur objet en croyant que cela sera plus facile. Ils essaient de trouver une position qui sera plus simple. Ils les dessinent tous de face. Finalement, d'autres y vont au hasard. Après avoir mélangé les dessins et les polyèdres, on demande aux élèves d'associer le dessin avec le polyèdre. Comme les informations sont insuffisantes, les élèves ne peuvent pas les associer. Les élèves mentionnent les manques d'information pour une bonne compréhension.

Pour continuer l'expérimentation, Heleyel et Bertotto photographient (le dessin idéal) les constructions des élèves sur les différentes faces. Ensuite, les élèves doivent trouver toutes les photos qui correspondent à un polyèdre. Cependant, lorsque les élèves ont trouvé une photo ils ont tendance à arrêter leur recherche, ce qui oblige l'animateur à relancer l'activité. Il ne doit plus rester de photos. Cela provoque la manipulation des objets pour comparer. On le tourne pour le mettre dans la même position que la photo pour comparer. Enfin, les élèves sont invités à raisonner sur les caractéristiques des objets manipulés.

La photographie est une illustration intéressante pour une introduction aux représentations 3D, puisque les élèves sont déjà familiers avec ce genre de procédé. En effet, ils se reconnaissent sur une photo, ils reconnaissent la maison et d'autres situations familières…Donc, une activité de photographie des constructions ou des solides suivie par d'une observation photos-objets devient une activité signifiante pour faciliter la compréhension du passage 3D à 2D. Enfin, l'utilisation de solides transparents, dont les arêtes sont visibles, pourrait permettre le passage des élèves à une autre étape. En plaçant ces solides à distance, les élèves comparent avec les dessins 2D ou essaient tout simplement de dessiner ce qu'ils observent. Ils réalisent que les lignes qui se croisent sur le dessin, ou quand ils observent de loin, sont les arêtes qui ne se croisent pas dans la réalité.

Enfin, selon Lismont et Rouche (2001) deux formes géométriques identiques peuvent nous apparaitre différentes à cause de leur position. Pour pouvoir les comparer, il faut tourner les pièces manuellement et/ou mentalement ou les superposer. Ils ajoutent qu’il existe trois manières de reconnaître la congruence de deux objets. Il y a d’abord la perception directe des objets, ensuite la perception après avoir déplacé physiquement les objets et finalement la perception après avoir déplacé mentalement les objets. Ils donnent l’exemple d’un octaèdre photographié dans plusieurs positions. On suppose l’objet comme inconnu. L’octaèdre est construit avec deux pyramides accolées sur une base carrée. Sur chacune des photos, nous ne voyons qu’une partie de l’objet et non la totalité. L’aspect de l’objet est ainsi différent d’une photo à l’autre. Sur la première photo, on aperçoit deux faces sur huit et sur d’autres on en voit quatre. Cependant, aucune des photos ne montre l’objet en entier avec l’accès visuel de toutes les faces. Aussi, il est impossible de trouver une position qui nous permet de voir l’objet en entier. Cependant, on peut manipuler ce solide et ainsi découvrir les parties cachées. On peut même le faire avec les deux mains de façon symétrique.

Donc, un enchainement de perceptions de différents points de vue de l’objet manipulé et observé semble contribuer à créer une image mentale de l’objet chez les élèves. Si on associe cet enchainement de perceptions des objets avec les différentes représentations possibles, l’élève a la possibilité de développer sa capacité d’imagerie mentale en établissant des liens entre les représentations. En voyant l’image, il peut visualiser l’objet dans l’espace. Il pourrait même reconnaitre une image qui représente une partie cachée d’un objet régulier parce qu’il arrive à le tourner mentalement, ou peut reconstruire mentalement un objet à partir de son patron. Pour Lismont et Rouche (2001), le mouvement joue un rôle important dans le développement des habiletés de visualisation. Les habiletés de visualisation se développeraient donc en relation étroite avec des activités exigeant de faire des représentations. Quand les élèves sont familiarisés avec ces habiletés de visualisation, les mesures qui indiquent la longueur, la largeur et les hauteurs notées sur le dessin 2D pour un volume ont plus de sens pour les élèves.

2.2. Les écueils liés à la rétroaction de la tâche

Nous avons pu constater que Lépine (1995-1996) suggérait d'ouvrir la question d'un problème à différents possibles afin de modifier l'activité des élèves et d'orienter les discussions vers la diversité plutôt que la conformité, ce qui pourrait permettre de développer des habiletés sociales. En effet, les élèves acquièrent la capacité de réagir collectivement face à une situation inconnue et inattendue en proposant, analysant et modifiant des idées. Dias (2009) a proposé à 28 élèves de 12 ans de l'école primaire ordinaire, et à des élèves présentant des difficultés de langage, une résolution de problème de type ouvert c'est-à-dire un problème pour lequel les élèves n'ont pas accès à une solution reconnue et pour lequel il existe plusieurs solutions. Les élèves ont pour tâche la construction et la découverte des polyèdres réguliers (solides de Platon[2]). Les élèves vont d'abord explorer toutes les possibilités et impossibilités de solides et chercher les polyèdres réguliers. Bref, une résolution de problème par la recherche.

Cette recherche démontre que les élèves prennent le problème en charge par de multiples tentatives raisonnées dont la preuve peut être faite. Certaines constructions sont plus difficiles pour les élèves. Un problème apparait aux élèves lors du montage avec des hexagones. Ce montage présente au départ la même difficulté que pour le carré, le pavage plan. Il est impossible de construire un polyèdre régulier avec les hexagones, mais les élèves l'ignorent. Les élèves commencent l'assemblage des hexagones sur le plan. Par la suite, en voulant donner la forme du polyèdre, le montage présente des arrondis. Le montage plie. Ce qui pourrait donner l'impression qu'on peut faire un polyèdre avec des hexagones. Les élèves proposent alors des solutions en discutant et en échangeant des remarques et des idées : «ça casse, ça ne marche pas, il

---

[2] Pour un petit rappel, le polyèdre régulier de Platon est construit à partir d'un ensemble polygones réguliers. À tous les sommets du polyèdre, on retrouve le même nombre de faces (polygones). A partir de cette définition, on demande aux élèves de trouver tous les polyèdres réguliers possibles. La principale difficulté pour les élèves réside dans le fait que le nombre de polyèdre à trouver est inconnu. Pour l'activité, les élèves disposent d'un matériel de construction en plastique de type «polydrons». Les élèves ont deux postulats à respecter et à vérifier : Il y a au moins trois faces pour un sommet et la somme des angles intérieurs des polygones à un sommet est inférieure à 360 degré. Le premier postulat ne cause pas de difficulté dans la mise en œuvre comparativement au deuxième qui devient l'enjeu de l'activité. Le rôle de l'enseignant est de guider l'activité.

faut des triangles, s’il y en avait plus, je pense que c’est impossible, oui c’est possible, il y a une face de trop…» Il y a aussi des discussions avec le maitre. L’impossibilité est une solution qui est repoussée et même ignorée par les élèves. Cette même activité réalisée dans une classe avec des élèves en difficultés d’apprentissage montre que les élèves vivent les mêmes difficultés. La construction des polyèdres montre le même processus. Les découvertes apportent de nouvelles idées à essayer et les élèves se montrent captivés par ces activités de géométrie. Cela permet aux élèves de découvrir des éléments de savoirs mathématiques, de valider les possibilités et les impossibilités tout en cherchant des solutions.

Le groupe de chercheurs Bacher *et al.* (2006) ont fait une expérimentation similaire à celle de Dias (2009) sur les polyèdres de Platon dans une classe d’élèves de 15 ans, mais en utilisant comme matériel de construction des arêtes et des billes aimantés ou des tiges de bois et une pâte à fixer. Ils ont observé les mêmes difficultés concernant la construction du polyèdre avec le triangle équilatéral. La présentation d’une situation-problème à résoudre stimule les élèves les entrainant vers la résolution. L’utilisation du matériel permet la modélisation des polyèdres en favorisant les essais, le questionnement et la discussion, une véritable activité mathématique. Les élèves font la découverte de la théorie en explorant des possibilités.

Les élèves ont construit différents polyèdres réguliers et non réguliers et ont fait plusieurs découvertes. En superposant et en comparant, ils remarquent que les faces planes sont des polygones réguliers et qu’elles ont des arêtes d’égales longueurs. De plus, chaque sommet du polyèdre a trois ou quatre faces. Ils constatent que même s’ils tournent le polyèdre, celui-ci reste le même polyèdre. Les élèves font aussi des tentatives infructueuses de construction en particulier pour la construction d’un solide avec six faces pour un sommet. Par la modélisation, les élèves découvrent les caractéristiques des polyèdres. En plus, ils essaient des polyèdres qui ne sont pas réguliers dans leurs tentatives pour les comparer. La modélisation permet aux élèves de développer des habiletés de visualisation et de construire la définition des polyèdres réguliers et ce, autrement qu’avec la présentation théorique de la formule d’Euler. Il semble ainsi que la rétroaction de situation-problème géométrique favorise la modélisation, un outil conceptuel qui permet aux élèves de repérer des «patterns» et de développer des habiletés de visualisation.

Par la construction de polyèdres réguliers, Dias (2009) et Bacher (2006) proposent des problèmes de type ouvert aux élèves. Le nombre de polyèdres à trouver est inconnu. La construction leur permet de vérifier la régularité des polyèdres. Ils ont la possibilité d'explorer des constructions irrégulières et aussi des constructions impossibles. Ces constructions permettent une rétroaction de la tâche pour expliquer le problème qui surgit durant l'activité. Après des tentatives de solutions, les élèves constatent et acceptent l'impossibilité de certaines formes de polyèdres. Dans ce genre d'activité, les discussions entre pairs permettent le raisonnement, les découvertes pour réagir devant l'inconnu tout en développant la visualisation. L'utilisation du matériel dans les constructions géométriques permet la vérification des idées émises et la mise en place de relations mathématiques.

2.3. Les écueils liés aux énoncés

Nous avons pu constater que la familiarité des élèves avec certaines expressions ou encore une attention portée à des indices relatifs à l'énoncé plutôt qu'aux relations en jeu risque de réduire l'exploration mathématique des élèves et de provoquer des erreurs. Bertotto (2006) reconnaît que l'élève qui débute l'école a déjà un certain vocabulaire relié à la géométrie, vocabulaire qu'il a élaboré dans son environnement familial et social. Selon Pelloquin (2002), les élèves peuvent reconnaître le carré, le rectangle, et le cercle. Cependant, pour décrire les figures géométriques, les élèves ont besoin du vocabulaire reliés aux caractéristiques des différentes figures géométriques. Pour susciter le développement du vocabulaire, certains chercheurs s'intéressent aux échanges entre les élèves, d'autres se préoccupent de faire émerger les caractéristiques des figures ou des solides explorés ou encore aux types de messages formulés par les élèves.

Ainsi, les chercheurs qui visent à favoriser les échanges verbaux entre les élèves, et entre le maitre et les élèves ont présenté aux élèves du primaire des activités utilisant des figures et des solides (Bertotto, 2006; Aubertin et al., 2007; Lacroix, 1991-1992; Bettinelli, 1994-1995; Benhadj et Debon, 1978-1979; Bessot et Eberhard, 1982; Bacher et al., 2006; Pelloquin, 2002; Grand N[3], 1995-1996; Dias, 2009). Les élèves, familiarisés avec la forme des pièces, ont fait des constructions, ont utilisé un vocabulaire rudimentaire au départ de leurs échanges, vocabulaire en lien avec les observations et ont développé une compréhension de mots nouveaux. Selon ces chercheurs ces moments étaient favorables pour introduire un vocabulaire de géométrie. Les échanges auraient permis aux élèves de sentir la nécessité d'apprendre le nom des formes et les caractéristiques associées aux figures et aux solides.

Pour favoriser l'utilisation d'un vocabulaire relié aux formes géométriques, aux solides et aux polyèdres, Benhadj et Debon (1978-1979) demandent à des élèves de 7-8 ans de construire tous les objets possibles en collant ensemble 4 blocs de dimensions 2 cm x 2 cm pour faire ensuite un travail de classement. Selon la consigne, les élèves ne doivent pas avoir deux objets identiques dans leur équipe au risque de réduire la comparaison durant l'activité. Les élèves comparent, classent et découvrent les symétries par rapport au plan. Les objets ressemblants sont nommés «des frères» par l'auteur et ou décrits comme «pas tout à fait pareils», ce qui donne un sens au mot «symétrie». Les élèves ont pu observer des symétries (similitudes, des contraires, des miroirs).

Toutefois, écrire une situation géométrique n'est pas simple pour les élèves. Bessot et Eberhard (1982) ont observé que les élèves de 9-10 ans ont priorisé le dessin, plutôt que l'écriture, pour composer des messages qui décrivaient leurs constructions de d'assemblage de cubes. Sur l'ensemble des élèves, trois seulement ont priorisé le message écrit alors qu'ils avaient le choix des moyens. Le même phénomène est observé dans une autre recherche de Bessot et Eberhard (1982) auprès d'élèves de 7

[3] Ce texte n'a pas d'auteur. Nous avons donc indiqué le nom de la revue

ans. Parmi les messages produits, c’est le type figural qui a dominé et qui a été retenu par 22 des 26 élèves. Seulement 4 messages étaient écrits (aucun dessin).

Une situation-problème impliquant la description écrite semble amener les élèves à prendre conscience de la difficulté à décrire efficacement un montage, une construction ou un solide. Cela pourrait susciter en eux le besoin d’acquérir du vocabulaire. Polo (1989) propose à des élèves de 8 ans une activité qui consiste à décrire six montages qui diffèrent par la forme et la composition des couleurs. Chaque dyade d’élèves doit composer un message écrit (sans dessin) qui sera transmis à l’autre dyade de l’équipe qui aura pour tâche de reconstruire l’objet. Une étape de validation par une mise en commun servira à comparer le modèle avec l’objet reconstruit.

Polo (1989) mentionne que la description des montages faite par les élèves s’avère difficile. Les phrases écrites par les élèves sont écourtées à l’essentiel de l’observation et le message est incomplet pour celui qui doit reconstruire. Par exemple, certains élèves utilisent des mots vagues (bosse, trou, objets…) et d’autres utilisent la comparaison avec des objets connus (ça ressemble à…un escalier ou autre). Un seul message sur l’ensemble est bien organisé avec des dimensions. Les mots «carré, rectangle, plaque, cube, barre» sont employés, mais les élèves éprouvent de la difficulté à préciser les emplacements des cubes. La tâche de décodage est très difficile même avec l’aide de l’émetteur. Les élèves découvrent aussi l’importance des mots d’emplacement : devant, derrière, à gauche, à droite, au-dessus, en-dessous, en haut, en bas… Cette tâche a permis une prise de conscience sur la nécessité d’acquérir du vocabulaire pour pouvoir composer plus efficacement un message descriptif. L’acquisition de ce vocabulaire permet par la suite aux élèves de mieux comprendre une description écrite d’une construction contenue dans un énoncé.

Le même phénomène est observé dans la recherche combinée géologie-géométrie de Javelas et Rimbourg (1993) faite auprès d’élèves de 9-10 ans. Pour limiter la description écrite des roches à des critères géométriques, les élèves doivent exclure la forme, la couleur, la grosseur, les ombres…en décrivant le minéral d’une photo (il y a

12 photos). Les élèves essaient de retrouver la photo à partir de la description faite par d'autres élèves. Le vocabulaire cause un problème important lors de la construction des messages. Au moment de la mise en commun sur la qualité du message, les élèves mentionnent qu'ils sont parfois trop longs, incomplets ou contiennent des erreurs et de la confusion due au manque de vocabulaire. Les termes employés par les jeunes sont notés au tableau et le maitre barre ceux dont le vocabulaire est inadéquat et encercle les termes de géométrie que les élèves choisissent.

D'une activité de description à l'autre, les auteurs notent une évolution dans l'acquisition du vocabulaire. Après avoir construit une pyramide en pâte à modeler, les élèves se placent en équipes de 2 en utilisant le matériel suivant : une pyramide copiée en pâte à modeler à 4 faces à base carrée, 2 photographies de minéraux et 22 maquettes «squelettes creuses» de polyèdres «Volumes à construire (Javelas et Rimbourg, 1993)». Sur un brouillon, les élèves commencent par décrire le minéral (pyramide) copié en pâte à modeler. Le maitre inscrit au tableau les commentaires qui sont les critères de description géométrique. Ensuite, en regardant les 2 photographies, chaque élève doit décrire le minéral en imaginant les aspects cachés. Ils sont amenés à justifier leur description. Imaginer les formes et dénombrer les faces cachées sont des activités difficiles pour les élèves. Ils ont tendance à se décourager. Quand la visualisation est difficile, on revient à la manipulation physique. Cependant, les élèves ont bien réussi la tâche de description géométrique.

L'objectif de l'expérimentation de Douady et Perrin (1987) auprès d'élèves de 9-10 ans est d'établir le lien entre la mesure de l'aire à partir d'une unité donnée (1 cm^2) et l'aire en utilisant un moyen autre que la figure carrée de 1 cm de côté. Puisque les élèves sont déjà familiers avec le carreau de 1cm de côté, les auteures abordent l'expression «centimètre carré» noté cm^2. Les élèves ont tendance à confondre 1 cm^2 et un carré de 1 cm de côté. La notation «cm^2» n'amène pas les enfants à faire la distinction entre unité d'aire et une unité de longueur ce qui crée une confusion entre longueur et aire.

En équipes de deux, chaque élève reçoit la consigne de colorier 3 ou 4 surfaces différentes ayant une aire de 1 cm² et au moins un triangle sur un papier quadrillé de ½ cm. Par la suite, on leur demande de partager les surfaces en deux parties de même aire et ensuite en 4 et de trouver l'aire de ces parties. L'activité se poursuit par le coloriage de 3 ou 4 surfaces différentes ayant une aire de ½ cm², ensuite ¼ cm² dont au moins un triangle. Finalement, ils doivent colorier des surfaces différentes ayant 12 cm² dont 3 rectangles. En somme, les élèves ont produit des dessins variées. Cependant, il y avait parfois de la confusion entre la longueur d'un carré de ½ cm de côté et ½ cm². Les activités de géométrie nous permettent ainsi de découvrir des confusions qui risqueraient autrement de s'installer dans le raisonnement des élèves.

Enfin, l'utilisation du matériel didactique semble un moyen efficace pour amener les élèves à comprendre la différence entre polyèdre et polygone. Javelas et Rimbourg (1993) proposent une autre activité qui consiste à décrire une maquette à l'aide du tableau de description. Les élèves peuvent décrire celles qui leur plaisent le plus. Cette fois, les élèves se heurtent à un vocabulaire descriptif des faces. Pour familiariser les élèves avec le nom des polyèdres, le maitre amène les élèves à faire un lien entre la composition du vocabulaire des polygones et des polyèdres avec leurs formes respectives. On fait une analyse de la composition des préfixes et des suffixes : gone (côté), èdre (face, plan). La manipulation des figures et des solides amène les élèves à établir des liens entre les critères des objets et la composition de leurs noms. Les élèves sont ainsi en mesure de reconnaître comment le vocabulaire géométrique permet de donner des descriptions précises et synthétisées en parlant des mêmes objets (solides).

Dans l'étude de Javelas et Rimbourg (1993), le besoin des élèves de pouvoir préciser les descriptions des solides a favorisé une évolution du langage écrit d'une activité à l'autre. Les auteurs concentrent les activités sur le développement du vocabulaire relié aux cristaux qui sont des polyèdres. De plus, une prise de conscience par les élèves concernant le manque de vocabulaire suscite la nécessité de le développer. À travers les activités, les élèves ont senti la nécessité de développer un vocabulaire pour nommer les figures et les polyèdres, pour décrire les caractéristiques et les emplacements. Les activités en géométrie favorisent l'acquisition d'un vocabulaire varié qui sera réinvesti dans la résolution des problèmes par la suite. Ce vocabulaire facilite la modélisation de la situation qui mène au choix des opérations arithmétiques.

2.4. Pour favoriser les relations logico-mathématiques

Des consignes qui dirigent les élèves vers la recherche plutôt que vers la réponse à trouver, favorisent le raisonnement mathématique des élèves. Aubertin *et al.* (2007) postulent que la construction et les dessins conduiront les élèves de 4 à 6 ans à découvrir les éléments de bases des figures géométriques et des solides pour les utiliser dans leurs créations. Les élèves travaillent dans le plan et dans l'espace. Les activités d'observation et des activités-problèmes avec du matériel de manipulation (Mosaïques, Attrimaths, Moisson des Formes, Clixi, Jovo, Polydron et polydron ajouré) favorisent l'expérimentation par tâtonnement, la reconnaissance des différentes formes, la description des constructions et des reproductions. C'est ainsi que dans un premier temps, le fait de laisser libre cours aux commentaires des élèves permet d'observer leur raisonnement. Dans une de leurs expérimentations, les élèves comparent la forme d'une pièce géométrique à une table située dans la classe et appelée «la table octogonale» par l'auteure. Cependant ce «rond pointu» (polygone), comme l'écrit l'auteur, n'a pas tout à fait la même forme que la table, car il a 6 côtés et non 8. Un élève a choisi le nombre de chaises autour de la table comme repère et les compte. À la demande de l'animatrice, cet élève compte ensuite le nombre de côtés d'un hexagone sur une photo. Il révèle à ses compagnons, que la table a huit côtés et que la pièce jaune en a six. Les élèves réalisent ainsi que les deux formes géométriques sont différentes. Dans cette expérience, l'observation, le dénombrement des côtés et la comparaison sont les activités cognitives qui ont guidé le développement logico-mathématique chez l'élève.

Dans un deuxième temps, une activité de construction libre permet à Aubertin *et al*. (2007) d'observer que les élèves constatent qu'il est possible de former une nouvelle forme géométrique avec l'agencement de deux ou plusieurs formes géométriques. Par exemple, l'hexagone est formé avec l'agencement de 6 triangles pareils, deux triangles forment un losange. Dans une activité qui consiste à construire d'après un modèle dessiné, les élèves doivent observer les formes sur une image et les comparer aux pièces mises à leur disposition pour associer l'image et la pièce. Cette activité nécessite un travail d'observation et de comparaison tout en respectant l'orientation. Par la suite, les élèves ont la possibilité de confirmer la justesse de leur travail puisqu'ils peuvent superposer la construction à l'image. Les élèves constatent les caractéristiques des formes géométriques.

Dans un troisième temps, Aubertin *et al.* (2007) proposent une situation-problème. Afin d'augmenter le nombre de carrés nécessaires pour réaliser un assemblage, les chercheurs placent à la disposition des élèves des triangles isocèles rectangles. Cela oblige les élèves à construire des carrés. En plus de découvrir que deux triangles rectangles forment un carré, les élèves découvrent que plusieurs triangles peuvent former un losange ou un polygone. C'est ainsi que les élèves reconnaissent que tous les polygones sont composés de plusieurs triangles.

Les différentes activités mentionnées ci-haut montrent comment, dès le départ, l'attention des élèves est dirigée vers le raisonnement plutôt que la recherche d'une réponse. Les élèves comparent les pièces, créent des pièces manquantes par des pièces équivalentes, par exemple deux triangles pour un carré. De plus, ils ont la possibilité de découvrir, par eux-mêmes, des caractéristiques pour distinguer deux polygones presqu'identiques à première vue (huit côtés- six côtés). Ce qui importe ici en plus de la compréhension de la différence entre des polygones est cette capacité à repérer les différences ou les caractéristiques parfois subtiles contenues dans les situations proposées et dans les problèmes. Ces caractéristiques alimentent le raisonnement. En effet, pour établir des relations logico-mathématiques entre des données, il faut d'abord les repérer. Cette habileté est importante dans la résolution des problèmes. En effet, les regroupements de figures sur la base de leurs ressemblances contribuent à des réflexions dans les élèves doivent convenir. La comparaison de figures ou de solides contribue à l'élaboration de relations d'implication dans lesquels interviennent des relations d'inclusion.

2.4.1. Raisonner les formules

L'objectif de Frosi et Janvier (1991) et de Janvier (1993) est de familiariser des élèves du secondaire avec les formules en les amenant à les raisonner. A l'aide du matériel didactique de géométrie, l'animateur questionne les élèves à partir d'une mise en situation. Ensuite, les élèves peuvent vérifier leurs hypothèses. Dans la première situation, l'animateur enroule une feuille de 8½ x 11 de deux façons différentes, dans le sens de la longueur et dans le sens de la largeur. Ensuite, il interroge les élèves : « Le volume obtenu est-il le même dans les deux cas et pourquoi?» La question posée avant l'expérimentation provoque l'anticipation et la réflexion des élèves. La plupart des élèves pensent que le volume est le même, parce que les feuilles ont la même grandeur, la même surface. Il y a une confusion entre la surface latérale et le volume. Donc, les élèves ont fait leurs hypothèses. L'expérimentation qui suit démontre clairement que les volumes sont différents, ce qui provoque une prise de conscience chez les élèves. Avec des surfaces latérales identiques, on peut obtenir des volumes différents.

Dans une autre situation de Frosi et Janvier (1991) et de Janvier (1993), l'animateur utilise des plaquettes de cubes de sucre dans le but d'amener les élèves à raisonner l'opération utilisée dans la formule du volume. Chaque plaquette est recouverte d'un nombre de cubes. Il superpose plusieurs plaquettes. Les élèves découvrent qu'il y a une répétition du nombre de cubes et en arrivent à reconnaître l'opération : le nombre de cubes pour une plaquette multiplié par le nombre de plaquettes (hauteur). Dans ce cas-ci, un lien s'établit entre la répétition des rangées du premier étage et le nombre d'étages pour en arriver à «construire» la formule des volumes. Par la suite, l'animateur relance les élèves par une question[4] : «Est-ce que… on peut avoir une boite qui contient 108 cubes de sucre en ayant toujours les mêmes tranches?» Si les blocs restent entiers, il y aura la moitié d'un niveau. Une élève

[4] Frosi et Janvier, 1991

mentionne que le solide ne sera pas égal, il manque des blocs. Une autre élève propose : «On fait 6 x 4 =24 et on obtient un solide de 4 plaquettes de hauteur, on a 96 cubes. Si on fait 108 – 96, on obtient 12 cubes ce qui donne la moitié d'un étage. Si on sépare les blocs en deux, on aura 4 étages et demi». Ce type de situation permet aux élèves d'observer et d'analyser les phénomènes en jeu en mettant en œuvre des relations logico-mathématiques. Donc ici, les observations suscitées et le raisonnement exploité donnent un sens à la formule du volume d'un solide.

La différence entre la présentation de la formule du volume et son élaboration par raisonnement est déterminante pour son utilisation dans les différents problèmes. En cas d'oubli les élèves pourront reconstruire logiquement la formule. À la question : «pourquoi choisis-tu cette formule?», les élèves seront capables de donner une réponse. Cette compréhension donne un sens supplémentaire à l'opération arithmétique de la multiplication.

2.4.2. Que signifie «multiplier des fractions»?

Barrera (2011) a fait une recherche dont l'objectif était d'amener les élèves à visualiser la multiplication de fractions en utilisant des représentations géométriques. Pour l'expérimentation, on demandait aux élèves de visualiser une expression arithmétique impliquant une addition et une multiplication de fractions induit par des exposants. Le travail se faisait en groupe et les élèves pouvaient discuter pour échanger des idées, des connaissances et essayer des solutions. L'enseignant orientait l'activité au besoin, sans présenter une démarche. Voici le problème proposé[5] :

$\frac{1}{4} + (1/4)^2 + (1/4)^3 + (1/4)^4 + \ldots + (1/4)^n \simeq 1/3$
Comment peut-on visualiser que cette assertion est correcte ?

5 Barrera, 2011, p.6.

Ce problème représentait un défi de taille pour des élèves de 14-15 ans. Les élèves ont commencé par vérifier l'expression par le calcul soit à l'aide de la calculatrice soit à la main. Les élèves ont ensuite fait des dessins géométriques. Tout en dessinant, ils discutaient pour trouver des solutions. À cette étape, plusieurs dessins géométriques différents sont observés : des cercles, des carrés et des rectangles juxtaposés pour représenter le ¼. L'amorce était intéressante, mais les élèves devaient aller plus loin dans leurs représentations. Ils se sont heurtés à des difficultés. En travaillant, les élèves ont découvert qu'une multiplication de fractions «ça veut dire une partie d'une autre». À partir de ce constat, ils ont fait d'autres tentatives, mais celles-ci n'illustraient pas l'expression, car les fractions étaient placées dans des cercles différents plutôt que d'être dans le même cercle. Les élèves ont commencé à placer les figures géométriques dans un même carré. Ils ont placé le quart, le quart du quart, etc. dans un même quadrilatère. A cette étape, on pouvait voir toutes les fractions placés, par contre l'égalité n'était pas représentée. Ils ont fait une mise en commun, car il fallait trouver une solution. Les élèves ont constaté que plus la puissance augmente, plus la fraction diminue et devient négligeable. Ils ont essayé d'organiser et de colorier les fractions de leurs figures pour montrer une approximation. Les élèves ont trouvé que la reconnaissance du tiers était difficile. Finalement, l'emploi d'une barre numérique ou d'un rectangle allongé, par lesquels les différentes fractions sont placés une à côté de l'autre plutôt que l'une dans l'autre, illustre bien l'assertion.

Cette situation-problème impliquait de modifier des représentations, de les compléter, de chercher d'autres pistes de solution pour trouver des solutions. Les élèves ont fait des découvertes et ont donné un sens à la multiplication des fractions en utilisant des figures géométriques. De plus, les élèves ont mentionné que même si l'activité était difficile, elle était amusante et intéressante. Même si au départ, les élèves savaient comment multiplier, ils ont découvert une signification particulière pour la multiplication de fractions : ¼ x ¼ signifie le quart du quart.

2.5. Pour favoriser la reconnaissance de l'invariance d'une propriété mathématique selon certaines transformations

Les élèves sont habitués à travailler avec une représentation type des problèmes. Par exemple, les figures géométriques sont souvent présentées de la même façon, soit la base horizontale et parallèle avec la bordure de la feuille ayant des dimensions typées. Qu'arrive-t-il si on présente un rectangle dont la base est en diagonale avec la bordure de la feuille? Ou si on modifie l'orientation de la figure?

Pinet et Gentaz (2007) ont fait une recherche auprès des enfants de la maternelle (5 ans). Leur but était l'observation et l'analyse de la reconnaissance visuelle de quatre figures géométriques : le carré, le triangle, le rectangle et le cercle. Dans leur recherche, ces auteurs font l'hypothèse que les élèves considèreront quelques caractéristiques géométriques et spatiales pour reconnaître les figures (carrés, rectangles et triangles) sur les feuilles-tests. Par exemple, l'élève sélectionnera plus facilement les figures stéréotypées, devenant ainsi un point de référence pour chaque catégorie de figures. Les figures stéréotypées sont déterminées par quelques caractéristiques. D'abord, la base du carré, du triangle ou du rectangle sont parallèles au bas de la feuille. La longueur du rectangle est une fois et demie la largeur. La base du triangle isocèle est une fois et demie plus courte que les autres côtés. L'enfant construirait ainsi ses connaissances géométriques en se référant au stéréotype.

Quarante-quatre enfants de la maternelle participent à la recherche. Ces enfants n'ont pas reçu un enseignement particulier sur les figures avant l'expérimentation. On leur présente quatre tests de reconnaissance d'une figure (carré, rectangle, triangle et cercle) parmi plusieurs figures distractives. Sur chacune des 4 feuilles-tests, sont tracées 20 figures géométriques planes dont 6 figures cibles et 14 figures distractives. Leur taille varie entre 8,5 cm de côté pour les grandes et 1,5 cm de côté pour les petites. L'orientation et les rapports de côtés sont déterminés. Parmi les figures distractives on retrouve (par exemple pour le carré) des rectangles, des parallélogrammes et des trapèzes. Les figures cibles sont numérotées afin de pouvoir vérifier celles qui sont les mieux repérées. Les élèves reçoivent la consigne de marquer d'une croix les figures cibles trouvées. Voici les résultats observés :

Tableau 1. Taux de reconnaissance de figures

Taux reconnaissance	stéréotypées	non stéréotypées	des figures
carré	86,6%	4%	73,5 %
rectangle	72,7%	61,8 %	63,6 %
triangle	**100%**	43,2 %).	52,6 %
cercle			99,2%

Les exemplaires «stéréotypées» dans l'ensemble des tests sont mieux reconnus par les enfants. Le niveau de reconnaissance des figures cibles varie pour les 4 figures. Donc, le cercle est au premier rang, suivent le carré, le rectangle et le triangle. Peu d'erreurs ou d'omissions sont observées pour le cercle contrairement au triangle qui cause un problème à l'ensemble des enfants. La recherche confirme que la reconnaissance des figures «stéréotypées» l'emporte sur celle des «non stéréotypées». Donc, les caractéristiques géométriques et spatiales (rapport entre les différentes longueurs des côtés et l'orientation spatiale) définissent le modèle stéréotypé. Tous les modèles d'une même figure ne sont pas reconnus également. De plus, des erreurs de reconnaissance sont aussi observées. Des enfants qui ont reconnu des carrés qui n'en sont pas, comme les parallélogrammes par exemple. En outre des rectangles sont confondus avec des carrés. Donc, plusieurs figures distractives ont été cochées par erreur. On peut penser que tous les cercles sont considérés comme le «stéréotype» par les enfants, car les omissions et les erreurs sont rares.

Les élèves du secondaire sont aussi sensibles à ce type d'erreur. Frosi et Janvier **(**1991) de même que Janvier (1993) observent que les opinions des élèves sont partagées lorsque l'animateur présente deux solides de formes différentes aux élèves en leur demandant si le bâton et le bloc occupent le même espace. Une élève fait une remarque: «Oui, parce qu'ils ont la même largeur et si on divise le bâton en quatre et qu'on superpose les plaques, on va obtenir la même chose». Alors l'animateur décompose le bâton, superpose les plaques et compare avec le bloc. Les élèves découvrent que des solides de formes différentes peuvent avoir le même volume, c'est-à-dire qu'ils peuvent être mesurés avec le même nombre de blocs unités.

En milieu scolaire, les élèves sont habitués à travailler à partir de figures «stéréotypées». Bien que, parmi un ensemble de figures, les figures stéréotypées soient reconnues plus facilement par les élèves, si les élèves pouvaient tourner les figures, ils pourraient constater l'invariance de cette dernière par rapport à son orientation. Il devient important de faire observer aux élèves que certaines transformations ne modifient pas les propriétés en jeu.

2.6 La visualisation pour favoriser le développement logico-mathématique

La visualisation et la pensée géométrique sont intimement reliées. Selon Lismont et Rouche (2001), la pensée géométrique est déclenchée par des phénomènes de l'environnement qui paraissent inexplicables à la première vue. Ces phénomènes provoquent des questionnements pour lesquels les individus souhaitent trouver des explications et des réponses pour ainsi comprendre l'environnement. Les réponses ne sont pas toujours facilement accessibles. Ces questionnements amènent à observer, à analyser, à tenter des essais, à vérifier et à faire des liens pour faire des découvertes et développer des théories. Belkhodja (2007), Marchand (2009) et Lismont et Rouche (2001) associent les connaissances géométriques et spatiales à la pensée géométrique. Belkhodja (2007) affirme que la capacité à visualiser en 3 et 2 dimensions est une compétence à développer d'autant plus qu'elle a un lien direct avec le «sens géométrique».

Nous l'avons vu précédemment, les habiletés de visualisation semblent se développer en étroite relation avec la représentation réalisée par les élèves. La visualisation en géométrie correspond à la capacité de se représenter mentalement des objets, des constructions géométriques et des représentations sans support matériel. Par cette activité, un individu peut concevoir mentalement des objets en mouvement (rotation, déplacement, construction) et aussi manipuler mentalement du matériel imaginaire pour éventuellement élaborer des constructions et des tracés géométriques sans papier ni crayon. Finalement, il peut aussi imaginer des représentations et des illustrations d'objets à partir d'une description (descriptions écrites, descriptions orales, consignes…) ou d'une formule mathématique. Enfin, à partir de représentations planes (en 2 dimensions), il peut imaginer les objets dans l'espace (en 3 dimensions).

Les gens en général possèdent une certaine capacité d'imagerie mentale qui peut varier d'un individu à l'autre. Selon Fortin et Rousseau (1994), l'observation de l'imagerie mentale d'un individu ne peut être étudiée que par les descriptions données par l'individu lui-même. Il ajoute que 10% de la population éprouve beaucoup de difficulté à se faire une image mentale. Cependant, ils ajoutent que les gens qui ont la capacité à construire des images mentales ont plus de facilité à mémoriser. Ils soulignent ainsi l'existence d'un lien étroit entre l'imagerie mentale et la mémoire. En effet, il est plus facile de se rappeler à partir d'une image mentale qu'à partir d'une description sémantique avec des mots et des phrases, les images seraient plus faciles à mémoriser que les mots. En outre, des objets peu familiers aux élèves telles les solides et les figures géométriques peuvent être plus difficiles à visualiser. Par exemple, il est plus facile de visualiser des gens qui s'assoient autour d'une table que de se représenter le dépliage d'un objet mentalement pour en obtenir son patron ou encore le pliage des faces d'un solide pour le reconstruire à partir d'un patron. Et plus encore, ajoutons un travail imaginaire plus complexe, soit la miniaturisation d'un village qu'on ne voit qu'en partie. La visualisation est une activité mentale «invisible», donc les moyens pour l'observer sont nécessaires. Selon Fortin et Rousseau (1989), les images se construisent à partir des perceptions et de l'interprétation de ces perceptions. Dans un tel contexte en géométrie, les élèves construisent une imagerie mentale à partir de leurs perceptions à l'abri du regard de l'enseignant lorsque les moyens pour observer leurs réflexions et commentaires ne sont pas utilisés.

Des erreurs de visualisation peuvent s'installer. Ribeiro Pöla (2000) mentionne un fait troublant dans une problématique présentée dans sa recherche faite auprès d'étudiants universitaires en architecture. En effet, le nombre d'étudiants qui échouent le cours de géométrie descriptive est élevé. Ils éprouvent de la difficulté à visualiser les plans en deux dimensions qui représentent des objets en trois dimensions, ce qui les empêche de comprendre une discipline significativement abstraite pour eux. Les étudiants doivent mémoriser la théorie expliquée par des dessins schématisés au tableau selon des méthodes encore traditionnelles. La visualisation est donc une compétence à développer, car elle favorise la mémoire, le raisonnement et la résolution de problème. Si la capacité d'imagerie mentale est peu développée, les élèves auront du mal par la suite à avoir des repères pour jouer avec les idées. Prenons par exemple des élèves du secondaire qui éprouvent encore de la difficulté à faire tourner mentalement des figures géométriques pour les comparer et repérer celles qui sont semblables parce qu'ils éprouvent des difficultés à reconnaitre des figures identiques qui ont des positions différentes mais immobiles sur la feuille.

Belkhodja (2007) précise deux formes de visualisation : la visualisation extérieure et la visualisation intérieure. **La visualisation extérieure,** avec l'utilisation du matériel didactique, favoriserait par la suite le développement de la visualisation intérieure sans le support du matériel. Concernant la visualisation extérieure, Belkhodja (2007), mentionne que la géométrie est un lieu mathématique qui favorise les représentations réelles d'objets et de concepts, car il y a une possibilité intéressante de faire coïncider la manipulation de matériel didactique (maquettes, géoplans, solides…) avec les différentes représentations et l'utilisation du langage symbolique. Elle ajoute que cette interrelation entre le matériel didactique, les représentations et le langage symbolique aide à la résolution de problème, une situation qui oblige l'élève à composer avec ses connaissances pour la solutionner. D'ailleurs, elle rappelle le modèle de Lesh (1983) qui propose une interaction entre les images, les symboles vocaux, les symboles écrits, les situations du monde réel, la manipulation. Pour développer l'activité d'imagerie mentale des élèves, il est souhaitable de présenter aux élèves du matériel à manipuler dans différentes situations afin que ces derniers puissent valider leurs observations. L'élève peut ainsi bouger l'objet par rotation, déplacement, développement, construction… ce qui lui permet de varier les points de vue pour reconnaître des aspects nouveaux sous des angles différents qui n'étaient pas visibles au départ. Cependant, pour développer la visualisation, Belkhodja rapporte que Sasda et Davis (1997) ajoutent deux éléments importants au support matériel : l'anticipation et le langage parlé. Belkhodja encourage donc le développement de la visualisation spatiale durant le parcours scolaire des élèves en prévoyant l'anticipation et le langage parlé dans les apprentissages qui font intervenir des dessins, du matériel didactique, la construction de formes.

La visualisation intérieure est la capacité à générer des images mentales sans support matériel. Belkhodja (2007) rapporte que selon Denis (1979), l'image mentale peut être provoqué de trois façons : par la réception d'une information verbale, par de l'information accumulée dans la mémoire à long terme et par des activités imaginaires de transformations sur les objets qui sont similaires à celles réalisées dans la réalité. Elle ajoute que l'analyse réalisée par Denis (1989) amène celui-ci à conclure que, compte tenu de la tendance importante à s'imaginer des situations sur lesquelles il réfléchit, l'utilisation volontaire de la visualisation est favorable à la résolution de problème et au raisonnement. Il encourage ensuite l'utilisation de la visualisation dans les situations problèmes dans lesquelles l'accès à la manipulation d'objets et aux représentations devient limité.

Par la visualisation en géométrie, les élèves peuvent travailler mentalement du matériel mathématique imaginaire comme si c'était du matériel réel. La recherche auprès d'étudiants universitaires démontre l'importance de développer cette compétence. Bien que les gens en général possèdent naturellement une certaine capacité à visualiser, les activités mathématiques sont plus difficile à imaginer que les activités de la vie courante, d'où l'intérêt d'un apprentissage à ce niveau. La visualisation est une compétence qui facilite la mémoire, le raisonnement et ainsi, la capacité à établir des relations logico-mathématiques sur des représentations qu'ils ne peuvent manipuler que mentalement.

2.6.1 Le passage du dessin à la reconnaissance des figures géométriques

Un autre facteur important est à considérer pour favoriser le passage des dessins vers les représentations géométriques : le passage du dessin familier dans la vie des enfants au traçage des figures et des représentations géométriques. Bouleau (2000-2001) a voulu dépister et comprendre les difficultés reliées à la reproduction de dessins, en proposant des activités de reproductions de dessins à 90 élèves sélectionnés dans quatre classes ordinaires : trois groupes en fin d'année (de la maternelle à la deuxième année) et un groupe de première année en début d'année. La tâche consistait à compléter un dessin incomplet à l'aide d'une règle pour qu'il soit pareil au modèle qui l'accompagne. Il n'y avait pas de limite de temps pour la passation des tests. Les élèves ont 4 dessins à compléter selon un modèle, et la difficulté augmente du dessin 1 au dessin 4. Le premier test est le dessin d'une maison. Pour les trois autres tests, les dessins à reproduire n'ont pas de repères familiers comme pour le test de la maison. Pour structurer leurs dessins, les élèves doivent considérer des points, des extrémités, des intersections, des segments de droite tout en utilisant une règle. Pour l'analyse des résultats, deux critères sont considérés : la qualité des liaisons et la qualité des tracés. Les résultats démontrent que la réussite des dessins diminue d'un test à l'autre.

On remarque que les points d'attache de la maison se retrouvent surtout sur le contour et l'exécution du tracé se fait directement d'un point à l'autre sans intersection à considérer. Le deuxième dessin est une figure géométrique. Pour exécuter ce dessin, l'élève doit tenir compte de trois points différents ou ignorer des points dans le traçage des lignes. Quels points entre dans le tracé? Jusqu'où va la ligne? Ces points deviennent des zones de contrastes qui peuvent partager l'attention des élèves à la tâche par rapport au premier dessin. Pour le troisième dessin, il y a une forte zone de contraste au sommet, plusieurs lignes partent de ce point. On peut remarquer que les lignes s'entrecroisent, ce qui peut mêler l'élève dans son analyse. Il doit considérer les lignes horizontales et les lignes partant du même sommet qui ne sont pas parallèles. Pour le quatrième dessin, la courbe formée par le tracé devient pour l'élève une fausse zone de contraste, ce qui complique la tâche d'analyse et le traçage. Les lignes s'entrecroisent et ne sont pas parallèles ce qui a pour effet de répartir le contraste sur le modèle à copier. De plus, l'emploi de la règle vient compliquer la tâche motrice de l'exécution. Fait intéressant, Bouleau observe un lien étroit entre la performance des dessins 2-3-4 et la réussite du premier dessin. La dégradation est plus forte pour ceux qui n'ont pas réussi la moitié du dessin de la maison. Même si les élèves tracent maladroitement, le dessin de la maison est plutôt facile à structurer comparativement aux autres dessins qui sont d'ailleurs très peu réussis. La difficulté à structurer certains dessins amène certains élèves à abandonner la règle pour dessiner à main levée. Ils négligent alors la précision du travail et se contentent de la ressemblance de son dessin avec la copie.

Le lien entre la capacité à réaliser le dessin de la maison et la meilleure réussite des autres dessins est intéressant. La maison fait partie de l'environnement familier de l'élève. Le deuxième dessin est géométrique. On ne retrouve pas l'objet représenté dans la réalité, sauf si l'élève a manipulé des formes géométriques. Il aurait été intéressant de savoir si la réussite d'un dessin géométrique simple devenu familier pour l'élève est équivalente au dessin de la maison sur la réussite des autres dessins. Pour la maison, l'élève pourrait dire : «la porte et la fenêtre ne sont pas complètes, je dois les compléter». Il a une référence familière. Il ne dira pas «je dois partir du point et me rendre à l'autre point en traçant une ligne». En terminant, Bouleau (2000-2001) suggère un apprentissage dans les reproductions en favorisant des situations axées sur la structuration dans l'espace tout en tenant compte des difficultés techniques pouvant interférer avec l'exécution. Le dessin familier pourrait-il préparer aux représentations géométriques?

Il faut souligner qu'il y a une différence entre un dessin et une figure géométrique. Les enfants peuvent ébaucher des figures géométriques, mais cela ne signifie pas qu'ils reconnaissent les caractéristiques qui définissent chacune des figures.

À ce sujet, Lismont et Rouche (2001) affirment que les dessins des élèves est une étape importante dans le développement d’une pensée géométrique. Selon eux, il faut les considérer avec une attention particulière. Ils ajoutent que le réalisme intellectuel des élèves se décrit comme la manière de représenter un élément de son environnement. Prenons l’exemple le dessin d’une chaise dans lequel on voit sur un même plan les pattes, le siège et le dossier. L’élève dessine davantage ce qu’il sait que ce qu’il voit. Le réalisme intellectuel est tout de même un moyen de représentation efficace des objets de l’espace. Ces auteurs ajoutent que vers la fin de la maternelle, des élèves sont capables de dessiner en perspective des cubes et des montages de cubes sur du papier pointé. Ce genre de dessins sera utile plus tard dans la formation des élèves. De plus, Bettinelli (2001) mentionne que les élèves ont beaucoup d’imagination à 5 ans, ce qui ouvre la porte à des créations nouvelles avec les pièces. Par contre, à 10 ans, le dessin occupe une place beaucoup moins naturelle dans l’esprit des jeunes.

Le dessin de thèmes familiers favoriserait le passage au dessin de la figure géométrique et ensuite aux tracés de différentes représentations géométriques. En effet, les élèves qui ont réussi à compléter la maison avait une meilleure réussite pour les figures et représentations géométriques. Pour compléter la maison, les élèves se servent de repères familiers et non de points et de ligne. Ce processus dans l’apprentissage va faciliter par exemple la transformation des maisons en points et les distances en ligne donc de transformer la réalité en langage mathématique pour éviter les écueils de la «fausse réalité», Les jeunes élèves de cinq ans ont une façon particulière de représenter leur univers familier. Tous les éléments s’y trouvent même si le dessin n’est pas conforme à la réalité (réalisme intellectuel). De plus, les élèves en bas âge manifestent un attrait particulier pour le dessin. En facilitant le passage du dessin familier aux représentations géométriques, les élèves liront les énoncés de leurs problèmes et seront capables de se faire une représentation mentale de la situation. Ils pourront le schématiser pour en faire ressortir les relations logico-mathématiques.

2.6.2 Du réel vers la visualisation

La compréhension en géométrie peut s'avérer plus laborieuse sans la visualisation. Il faudra une très grande capacité de mémorisation pour compenser le manque de visualisation. Quand la visualisation est bien développée, un élève arrive à manipuler du matériel imaginée et des représentations mentales. Selon Javellas et Rimbourg (1993) il est plus favorable de partir de l'univers familier de l'élève, de partir sur des bases concrètes pour aller vers l'abstraction. Cela donne des références sur lesquelles il peut s'appuyer au besoin. Cependant, la capacité de passer de l'objet physique à l'objet géométrique exige un changement de point de vue qui implique un repérage d'éléments invariants.

Van Hiele (dans Marchand, 2009) décrit le développement de la pensée géométrique en cinq étapes suite à l'aspect visuel des figures et des solides : le traitement des classes et des formes géométriques, le traitement des propriétés des formes, les relations entre les propriétés des formes, le système déductif des propriétés et l'analyse des systèmes déductifs. Dès la troisième étape, l'élève commence à faire des liens entre les propriétés des figures. La capacité d'établir des liens entre les propriétés se poursuit au secondaire. La progression à travers les niveaux de compréhension peut être différente pour les solides. Marchand mentionne que ces niveaux ne sont pas liés au développement intellectuel des élèves et peuvent varier d'un individu à l'autre. Marchand considère que le modèle de Van Hiele est davantage relié à l'acquisition des connaissances géométriques qu'aux connaissances spatiales. Donc elle complète le modèle de Van Hiele par un schéma de développement des connaissances spatiales qui favorise l'intériorisation des actions sur les objets (la visualisation).

Marchand (2009) propose trois niveaux de développement : objets et positions dans l'espace visible ou accessible, intériorisation des objets et de leurs positions dans l'espace, manipulations des objets et des positions intériorisés et relation entre les images et transformations. Au premier niveau, les actions sont faites concrètement à l'aide de matériel didactique. Elle mentionne que dès le premier niveau, il faut prévoir des activités qui favorisent l'intériorisation des actions sur l'objet par des constructions ou des recherches d'objets dans la classe. Cependant, elle ajoute que la manipulation ne suffit pas, il faut inclure l'anticipation des transformations dans les activités et prévoir des questions qui favoriseront le raisonnement et la réflexion. La dernière étape consiste à proposer des activités par lesquelles les élèves doivent manipuler mentalement, car la vue ne suffit plus pour résoudre. Donc, la pensée géométrique se construit avec des connaissances géométriques et des connaissances spatiales. L'acquisition des connaissances spatiales par la manipulation favorise le développement de la visualisation.

Malheureusement des chercheurs mentionnent que cet aspect est peu exploré en classe et est même inexistant, les enseignants éprouvent de la difficulté à le présenter aux élèves (Marchand, 2009; Ribeiro Pöla, 2000; Petit, 2005). Pour leur part, Berthelot et Salin (1993; 2000-2001) décrivent une modélisation spatio-géométrique utilisant des connaissances géométriques dans des problèmes de l'espace. Berthelot et Salin (1993) soulignent que les élèves ont déjà développé une base de connaissances spatiales avant leur début scolaire, alors que les connaissances géométriques doivent être enseignées.

Lismont et Rouche (2001) mentionnent que dans le cas des objets en trois dimensions, il est difficile de superposer pour comparer, car un objet ne peut entrer dans un autre de même grandeur. À la rigueur on peut comparer la représentation d'un objet à sa représentation par deux faces planes. Ils ajoutent qu'il est impossible de percevoir toutes les faces d'un objet en même temps. Quand je prends un objet, je vois une partie de l'objet, quand je le tourne j'aperçois une autre partie de l'objet mais la vue précédente est disparue. Ces objets en trois dimensions sont représentés en deux dimensions ce qui entraine des informations incomplètes constantes de l'objet. La capacité intellectuelle intervient alors, soit par la mémorisation et/ou par la visualisation. Les objets en trois dimensions offrent ainsi des occasions pour développer des habiletés de visualisation.

La visualisation extérieure, avec du matériel de manipulation, est utile pour la compréhension concrète et directement vérifiable des situations géométriques. L'élève commence par ces activités pour se familiariser avec différentes formes et objets géométriques qu'il peut observer en manipulant. Cependant, rester au niveau du matériel didactique handicape l'élève pour une visualisation intérieure. Il faut proposer des activités par lesquelles la manipulation devient plus encombrante et trop compliquée et même des activités où il faut se déplacer pour observer, comme par exemple de passer du petit espace au grand espace. La construction ou la représentation de son village nécessite une certaine mémoire visuelle, surtout s'il faut le dessiner. Cependant, le village constitue un espace familier pour les élèves ce qui facilite le travail. Grelier (2009) a proposé la construction et le plan d'un village en boites retournées à des élèves de huit à onze ans.

La visualisation se développe favorablement en passant du réel vers l'imaginaire par l'acquisition des connaissances géométriques (modèle de Van Hiele), mais surtout par l'acquisition des connaissances spatiales (modèle de Marchand) qui sont les deux aspects de la pensée géométrique. Selon les étapes du modèle de Marchand, les élèves font au début des activités avec du matériel didactique pour progresser vers des activités dont la manipulation est mentale. Dans ce processus, les élèves intériorisent les actes sur les objets. Donc la visualisation est favorisée par l'acquisition des connaissances spatiales entre autres par des activités de géométrie. Un élève qui a développé une imagerie mentale avec du matériel, aura des points de repères pour effectuer un travail de géométrie sans matériel. Cependant, selon Pollard (1987), manipuler des objets exige de piquer la curiosité de l'élève en provoquant le questionnement et les hypothèses qu'il pourra vérifier.

2.6.3 Le matériel didactique «virtuel»

Avec le développement technologique de l'informatique, le langage virtuel en géométrie s'est développé. On peut même se demander s'il est encore utile d'utiliser du matériel didactique. L'emploi du matériel didactique virtuel peut être considéré comme un moyen pratique étant donné la diminution d'objets à ranger dans la classe.

Cependant, la manipulation virtuelle s'avère-t-elle efficace pour le développement de la visualisation. Peut-elle remplacer la manipulation physique?

Il y a une différence entre la manipulation de matériel didactique réel et la manipulation de matériel didactique virtuel. Petit (2005) compare ces deux types de matériaux. Après avoir consulté neuf études, Drickey (2000 dans Petit, 2005) mentionne que 2 études sur 9 qui ont utilisé les deux modes de présentations arrivent à la conclusion que l'utilisation des deux moyens favorise une meilleure compréhension mathématique. Doliopoulos (1990 dans Petit, 2005) mentionne que l'utilisation des deux moyens est meilleure que l'utilisation d'un seul mode didactique. La manipulation virtuelle ne remplace pas la manipulation physique, elle la complète. Il est donc important de continuer à développer le matériel didactique réel. La manipulation virtuelle pourra permettre des raisonnements de nature géométrique et certaines opérations qui seraient impossibles sans le virtuel (Ribeiro Pöla, 2000).

3. Un retour sur l'hypothèse

L'hypothèse posée au départ était la suivante : une exploitation des activités géométriques réalisées dès le primaire pourrait favoriser l'apprentissage de l'arithmétique par la mise en évidence de certaines caractéristiques qui ne font pas intervenir les nombres mais les relations, ce qui pourrait contribuer à développer une conception différentes des mathématiques.

Dans cet essai, des recherches montrent comment les activités en géométrie soutiennent les élèves pour établir des liens nouveaux qui ajoutent du sens à leur compréhension. Une conception «du travail à faire en mathématiques» pourrait donc se modifier. En effet, les élèves posent une réflexion sur des relations plutôt que sur des nombres et des opérations arithmétiques. Une entrée dans les apprentissages mathématiques par des activités géométriques pourrait mener les élèves à donner un sens différent au raisonnement à faire en mathématiques.

L'expérience de Barrera (2011) conduit les élèves à découvrir que ¼ x ¼ signifie le quart du quart. Les expérimentations de Frosi et Janvier (1991); Janvier (1993) montrent que les élèves reconnaissent les répétitions du nombre de cubes de sucre par rangée et ensuite par nombre de plaquettes pour construire la formule du volume. Les élèves pourraient aussi reconnaitre que peu importe la position du solide, les opérations arithmétiques sont les mêmes. En effet, un solide ayant une longueur de 10 cm, une largeur de 8 cm et une hauteur de 5 cm ne modifie pas son volume malgré un changement d'orientation. Si je change la position de ce solide en le plaçant debout, il a une longueur 8 cm, une largeur de 5 cm et une hauteur de 10 cm. Le fait de bouger les solides pour changer de position permet aux élèves de reconnaître que le volume dans les deux cas demeure le même. Douady et Perrin (1987) observent la confusion entre les mesures de côtés et l'unité de mesure de 1cm² pour l'aire d'un carreau : 1 cm x 1 cm = 1 cm². Les élèves peuvent constater par leurs dessins que ½ cm x ½ cm = ¼ cm². Le ¼ est plus petit que ½.

Cet essai confirme que les activités géométriques se révèlent un atout non seulement pour les apprentissages en géométrie, mais aussi pour les mathématiques en général dont l'arithmétique. L'interaction des élèves avec du matériel didactique qui se transforme a l'avantage de favoriser les activités cognitives par le dénombrement, le classement, le regroupement et l'observation pour analyser, raisonner, reconnaître des caractéristiques et de leurs propriétés en relation avec les concepts géométriques en jeu. L'attention des élèves porte alors davantage sur les relations que sur les nombres donnant ainsi une signification aux propriétés et aux relations. Enfin, la visualisation extérieure favoriserait la visualisation intérieure utile pour le raisonnement et la résolution de problèmes.

4. Recommandation pour intervenir

Le but de l'apprentissage de l'arithmétique est, notamment, son utilisation pour résoudre des problèmes de la vie courante. Mêmes si les élèves savent comment faire leurs algorithmes, ils éprouvent de la difficulté à résoudre leurs problèmes d'application. Malgré les moyens utilisés pour aider les élèves, la difficulté persiste. Dans le présent travail quelques écueils sont soulevés et analysés : la fausse réalité, la rétroaction de la tâche, les énoncés, la mise en œuvre des relations logico-mathématiques et la reconnaissance des invariants par rapport à différentes caractéristiques d'une notion. Nos lectures nous ont conduits à penser que les écueils mentionnés peuvent être surmontés par des activités géométriques.

La plupart des recherches effectuées auprès des élèves d'âges différents, montrent comment les élèves passent en mode raisonnement dès le début des activités géométriques. Les activités en géométrie permettraient d'éviter l'écueil de la fausse réalité et procureraient une réalité immédiate qui provoque une sensibilité aux relations plutôt qu'aux nombres pour chercher ou/et résoudre une situation. En outre, le fait de prévoir une question pour amorcer la réflexion favoriserait l'émission d'une ou des hypothèses chez les élèves : «Je pense que… parce que…» Ils peuvent ensuite vérifier les hypothèses émises suite au raisonnement (observation, analyse, déduction, tentatives) en la confirmant, en la modifiant ou en l'infirmant (impossible).

L'introduction d'activités de géométrie dès la maternelle est une occasion par excellence pour introduire le vocabulaire, ce qui pourrait permettre de contourner l'écueil lié aux énoncés. En effet, nous avons pu constater que des activités dans lesquelles les élèves ressentent la nécessité de voir, de toucher, d'identifier les formes des figures ou des solides et les caractéristiques associées contribuent au développement du vocabulaire pour communiquer efficacement. Par certaines activités, les élèves sentent le besoin d'acquérir du vocabulaire pour décrire entre autres. De plus, ils peuvent acquérir du vocabulaire qui fait intervenir des relations logico-mathématiques. Les élèves peuvent ainsi mieux cerner le contenu de l'énoncé d'un problème pour le résoudre en choisissant les opérations arithmétiques pertinentes.

L'écueil de l'absence de rétroaction de la tâche pourrait être contourné par des activités de visualisation. En effet, les actions posées pour changer les points de vue favorisent le développement de la visualisation dès le jeune âge. Dans cette phase, les élèves observent, tournent les objets, les comparent aux dessins ou photos. Les mots «arête, sommet, côté, face…» prennent un sens dans l'esprit des élèves, car ils tournent un objet pour observer l'arrière des objets ou se déplacent à l'arrière d'un bâtiment. En fait, en plaçant les élèves dans une réalité directe (ici et maintenant) qui favorisent les rétroactions, il leur devient possible de susciter une autre conception des mathématiques. En outre, le matériel de manipulation géométrique permet de travailler les habiletés de visualisation par la construction de solides, l'association entre le schéma en blocs, les dessins 2D et 3D et les objets. Il devient alors possible aux élèves de se faire une représentation mentale des figures et de reconnaitre, notamment, l'invariance d'une face ou d'une figure par rapport à leur orientation. Un travail fait sur les habiletés de visualisation pourrait contribuer à enrichir les représentations mentales des élèves qui doivent résoudre une situation-problème.

Par les activités géométriques, les élèves se familiarisent avec les différents matériaux en explorant librement les possibilités de construction ou d'agencement et les activités de dessins. Cette familiarisation facilite par la suite le passage du matériel à une géométrie plus complexe. Par exemple, la photographie s'avère un moyen qui favorise le passage aux dessins de solides parce que les élèves sont familiers avec ce procédé. Ils se reconnaissent sur les photos, la maison etc. Ils sont capables à partir d'une photographie en 2D de s'imaginer le contenu en 3D. Par la suite, l'utilisation de dessins 2D pour représenter les solides aura plus de sens. Les mathématiques deviennent reliées à la réalité et non plus seulement une matière dans un cahier. La familiarisation fait émerger la curiosité à partir de laquelle le questionnement peut apparaitre.

Des activités géométriques pour apprendre à représenter et à comprendre différentes représentations offrent des occasions pour les élèves de ressentir la nécessité de ces représentations. Différentes fonctions de représentations apparaissent : pour mémoriser, pour transformer une représentation, pour passer de trois à deux dimensions. Cette familiarisation pourrait conduire les élèves à déterminer des repères pour comprendre, pour élaborer un raisonnement et vérifier leurs solutions de situations-problèmes de type «ouverts». Il devient alors possible de considérer les manuels scolaires pour inspirer l'organisation des activités de géométrie. La question à se poser est : « Comment puis-je utiliser les activités proposées pour favoriser les observations, le raisonnement, les découvertes et la recherche de solutions et le développement des habiletés sociales?

Bibliographie

A propos de patrons de solides. (1995-1996). *Grand N, volume* 57, 103-115.

Aubertin, J.-C., Bettinelli, B., Pedroletti, J.-C., Porcel, N. et Schubnel, Y. (2007). De la géométrie à l'école maternelle, pourquoi pas?, France : Presses universitaires de Franche-Comté.

Bacher, R., Cartier, L., Grenier, D. et Schmitt, M.-J. (2006). Activité…autour des polyèdres de Platon, *Petit X*, 70, 73-79.

*Bardier, J.-C. (2003). *Clicmaths, mathématiques au primaire, 3^e^ cycle,* Laval, Canada : Éditions Grand Duc.

*Barrera, R. (2011). Le rôle d'un processus de visualisation géométrique complémentaire du registre numérique, *Petit X*, 85, 5-26.

Belkhodja, M. (2007). *La visualisation en géométrie dans trois et deux dimensions en tant que compétence à développer à l'école, tome 1*. Thèse de doctorat, Université Laval, Québec, Québec) Repéré dans : http://www.theses.ulaval.ca/2007/24504/24504_1.pdf

Benhadj, J., Debon, O. (1978-1979). Compte rendu d'activités géométriques au C.E., *Grand N*, 23, 63-77.

Berte, A., Chagneau, J., Desnavres, C., Lafourcade, J. et Mauratille, M.-C., Sageaux, C. (2006). Engager les élèves dans une réelle activité mathématique, Un exemple : le cercle circonscrit en cinquième, *Petit X*, 70, 7-29.

Berthelot, R. et Salin, M.-H. (2000-2001). L'enseignement de la géométrie au début du collège, Comment concevoir le passage de la géométrie du constat à la géométrie déductive ?, *Petit X*, 56, 5-34.

Berthelot, R. et Salin, M.-H. (1993). L'enseignement de la géométrie à l'école primaire, *Grand N*, 53, 39-56.

Bertotto, A. (2006). *Usage de polydrons pour une initiation à la géométrie en maternelle,* Communication présentée au XXXII^e^ colloque COPIRELEM, Strasbourg, 1 à 15.

Bessot, A. et Eberhard, M. (1982). Représentation d'assemblage de cubes au C.M., *Grand N*, 26, 29-68.

*Bessot, A. et Eberhard, M. (1982). Représentation d'empilements de cubes au C.E., *Grand N*, 28, 21-66.

Bettinelli, B. (2001). Actions géométriques avec un ensemble de gabarits, *Repères,* 43, 5-26.

Bettinelli, B. (1994-1995)**.** La moisson des formes, *Grand N*, 56, 33-41.

Bonnas, C. (1999-2000). Formes et équilibre, *Grand N*, 65, 61-66.

Bouleau, N. (2000-2001). Reproduction et géométrie en cycle 1et 2, *Grand N*, 67, 15-32.

Construction et utilisation d'un code de désignation d'objets à l'école maternelle. (1985). *Grand N, volume* 37, 5-27.

DeBlois L. Larivière, A. (2012) Une analyse du contrat didactique pour interpréter les comportements des élèves au primaire. Colloque Espace Mathématique Francophone 2012. En ligne http://www.emf2012.unige.ch

DeBlois, L. (2011). *Enseigner les mathématiques : des intentions à préciser pour planifier, guider et interpréter*, Les Presses de l'Université Laval.

DeBlois, L. (1997). Trois élèves en difficulté devant des situations de réunion et de complément d'ensembles. *Educational Studies in Mathematics 34*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1, pp. 67-96. En ligne: http://www.springerlink.com/content/h9k4860286u62736/fulltext.pdf

DeBlois, L. (1996). Une analyse conceptuelle de la numération de position au primaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Grenoble : Éditions la Pensée Sauvage. France, 16 (1), 71-128.

Dias, T. (2009). La dimension expérimentale en mathématiques un exemple avec la situation des polyèdres, *Grand N*, 83, 63-83.

Douady, R. et Perrin, M.-J. (1987). Aires de surfaces planes en CM et en 6ème (2^{e} partie), *Grand N*, 41, 25-35.

Fortin, C. et Rousseau, R. (1994). *Psychologie cognitive : une approche de traitement de l'information*, Canada : Éditions Télé-université.

*Frosi, R. (réalisateur) et Janvier, C. (scénariste). (1991). Le volume, mais où sont les formules ? [DVD], Production service audiovisuel de l'Université du Québec à Montréal, Modulo Editeur Inc.

Giroux, J. & Ste-Marie, A. (2000). The solution of compare problems among first-grade students. *European Journal of Psychology of Education* 16(2), 141-161.

Grelier, J.-F. (2009). Constituer des espaces fictifs à l'aide de boites retournées pour aborder la représentation d'espaces à trois dimensions et réfléchir sur l'espace urbain quelques pistes du cycle 2 au cycle 3, *Grand N*, 84, 33-45.

Heleyel, J., Bertotto, A. (1995-1996). Polydrons, *Grand N*, 57, 9-21.

Javelas, R.**,** Rimbourg, Y. (1993). Modélisation géométrique d'un cristal et cristallisation d'un modèle, *Grand N*, 53, 79-118.

Janvier, C, (1993) Grandeur et mesure: la place des formules à partir de l'exemple du volume, *Bulletin AMQ*, 37 (3), 28-41.

Lacroix, D. (1991-1992). Boites à trous et jeux de formes, *Grand N*, 50, 103-109.

Lépine, L. (19961997). Tout problème ouvert n'engage pas nécessairement une bonne recherche, *Grand N*, 60, 43-55.

Lismont, L. et Rouche, N. (2001). *Formes et mouvements : Perspectives pour l'enseignement de la géométrie*, CREM, Belgique.

Marchand, P. (2009). Le développement du sens spatial au primaire, *Bulletin AMQ*, vol. XLIX, no 3, 63-79.

Pelloquin, R. (2002). Approche de la notion d'aire par la manipulation de formes géométriques en grande section, *Grand N*, 69, 19-29.

Petit, M. (2005). L'apport du matériel didactique virtuel dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, *Math VIP*, 1-11.

Pinet, L. et Gentaz, É. (2007). La reconnaissance des figures géométriques planes par les élèves de 5 ans, *Grand N*, 80, 17-28.

Pollard, A. (1987). Structuration de l'espace et représentations en CP – CE1, Approche de la dimension géographique dans le cadre d'une démarche d'éveil, *Grand N*, 41, 5-23.

Polo, M. (1989). Jeu de communication en géométrie dans l'espace : Une expérience en CE2, *Grand N*, 45, 5-20.

Record, G. (1983). Langage et énoncés de problèmes, *Grand N*, 30, 27-42.

Ribeiro Pöla, M.-C. (2000). *Une approche interactive pour un meilleur apprentissage de la géométrie descriptive*. Thèse de doctorat, Université Laval, Québec, Canada.

St-Laurent, L. et coll. (1995). Conception de l'enseignement-apprentissage à la base du PIER. Dans St-Laurent, L., Giasson, J., Simard, C., Dionne, J.-C., Royer, É., et coll. *Programme d'intervention auprès des élèves à risque :Une nouvelle option éducative* (p.9), Montréal, Gaëtan Morin Éditeur.

Vous avez dit volume ? (1983). *Grand N, volume* 30, 73-79.